

《线性代数》模拟试卷（十一）答案

一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

(×) 1. 交换行列式的两列，行列式的值不变.

(√) 2. 若 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ ，则当 $i \neq j$ 时， $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$ ，

其中 A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式.

(×) 3. 设 A, B 为同阶方阵，则 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

(√) 4. 一个非零向量一定线性无关.

(√) 5. 齐次线性方程组解的和仍然是该方程组的解.

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$. 答案: $ab^2 - ba^2$

2. 设 A, B 为三阶矩阵，且 $|A| = 1$ ，求 $|2|A|A^T| = \underline{\hspace{2cm}}$. 答案: 16

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$. 答案: $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

4. 向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 0, 0), \alpha_2 = (-1, 2, 1, -1), \alpha_3 = (0, 1, 1, -1)$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 答案: 2

三、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的充分必要条件是 (D)

A. $k = -2$

B. $k = 3$

C. $k \neq -2, k \neq 3$

D. $k = -2$ 或 $k = 3$

2. 设 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 1$, 则 $a =$ (A)

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

3. 设 A 为非零 n 阶矩阵, 下列矩阵中不是对称矩阵的是 (C)

- A. AA^T B. $A^T A$ C. $A - A^T$ D. $A + A^T$

4. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 1 \\ 2x_2 - x_3 = \lambda - 2 \\ x_3 = \lambda - 3 \\ (\lambda - 1)x_3 = -(\lambda - 1)(\lambda - 3) \end{cases}$ 有唯一解, 则 $\lambda =$ (C)

- A. 1 或 2 B. -1 或 3 C. 1 或 3 D. -1 或 -3

5. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 的标准形矩阵是 ()

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

6. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)$ 向量 $\beta = (-1, -1, 0)$ 可表示为

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合: $\beta = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$, 则 a, b, c 应满足条件 (D)

- A. $a = b = c = -1$ B. $a = 1, b = c = -1$ C. $a = c = -1, b = 1$ D. $a = b = -1, c = 1$

7. 设向量组 $\alpha_1 = (0, 1, -2, 3)$, $\alpha_2 = (3, -2, 4, 3)$, $\alpha_3 = (2, 0, 6, 3)$, $\alpha_4 = (-1, 2, -6, 4)$,

下列不是该向量组的极大线性无关组的是 ()

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. α_2, α_3

8. 三阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 1, 2$, 则下列矩阵中非奇异矩阵是 ()

- A. $I - A$ B. $I + A$ C. $2I - A$ D. $A - 3I$

四、计算题（共 50 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

解 原式 $\begin{matrix} r_1 \times (-1) + r_2 \\ r_1 \times (-3) + r_3 \\ r_1 \times (-2) + r_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}$ (3 分)

$\begin{matrix} r_2 \times 4 + r_3 \\ r_2 \times (-1) + r_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ (5 分)

$\begin{matrix} r_3 \times (-2) + r_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 51 \end{vmatrix}$ (6 分)

$= -153$ (7 分)

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 问 a 为何值时, 矩阵 A 的秩等于 2; a 为何值时,

矩阵 A 的秩等于 3. (8 分)

解 因为 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & 3 \end{vmatrix} = a-2$. (4 分)

当 $a=2$ 时, 矩阵 A 的三阶子式 $|A|=0$, 但 A 的二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ (或其余的二

阶子式不为 0 也可以). 因此当 $a=2$ 时, 矩阵 A 的秩等于 2. (6 分)

因为当 $a \neq 2$ 时, $|A| \neq 0$, 即 A 的三阶子式不等于 0, 而矩阵 A 没有更高阶的子

式, 所以当 $a \neq 2$ 时, 矩阵 A 的秩等于 3. (8 分) (8 分)

3. 判断矩阵是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (10 分)

解 因为矩阵 A 的行列式 $|A| = 1 \neq 0$, 所以矩阵 A 可逆. (2 分)

$$(A \quad I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_4 \times (-4) + r_1 \\ r_4 \times (-3) + r_2 \\ r_4 \times (-2) + r_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\begin{matrix} r_3 \times (-2) + r_2 \\ r_3 \times (-3) + r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\begin{matrix} r_2 \times (-2) + r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ 分}) \quad (\text{用其它方法计算都可以给出相应的分数})$$

4. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系. (15 分)

解 对该齐次线性方程组的系数矩阵 A 施行的初等行变换如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \times (-1) + r_2 \\ r_1 \times (-3) + r_3 \\ r_1 \times (-1) + r_4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \times (-1) + r_3 \\ r_2 \times (-2) + r_4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{2} + r_1 \\ r_2 \times \frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组同解于
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}.$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 这就是原方程组的一个基础解系. (15 分)

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

解 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda + 5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)[(\lambda - 4)(\lambda + 5) + 18] = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

当 $\lambda = -2$ 时, 由 $(\lambda I - A)X = 0$ 得
$$\begin{cases} -6x_1 - 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

令该方程组中 $x_3 = 1$ 得该方程组的一个基础解系 $\xi_1 = (-1, 1, 1)$, 所以矩阵 A 的对应于

特征值-2 的特征向量为 $k_1\xi_1$ ，其中 k_1 为任意非零常数.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(\lambda I - A)X = 0$ 得
$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{即 } x_1 = -2x_2.$$

令该方程组中 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 得该方程组的一个基础解系

$\xi_2 = (-2, 1, 0)^T$ ， $\xi_3 = (0, 0, 1)^T$ ，所以矩阵 A 的对应于特征值 1 的特征向量为

$k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ ，其中 k_2, k_3 为任意非零常数.