

授课班级 专业 撰写时间

[illegible]

提出正态总体期望为 μ_0 的假设，然后进行判断 假设检验的基本思想和做法 ● 通常借助于直观分析和理论分析相结合的做法 ● 基本原理就是人们在实际问题中经常采用的所谓小概率原理：“一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的” ● 假设检验的过程是要构造一个小概率事件，如果根据实际样本数据的计算，该小概率事件发生了，则拒绝原假设，否则接受原假设 下面结合实例来说明假设检验的基本思想. 例 1: 某车间用一台包装机包装葡萄糖。包得袋装糖重是一个随机变量，服从正态分布。 机器正常时：其均值为 0.5 公斤，标准差为 0.015 公斤。 某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取包装地糖 9 袋，称得净重为(公斤): 0.497, 0.506, 0.518, 0.524, 0.498, 0.511, 0.520, 0.515, 0.512 问机器是否正常？ 解: 由长期实践知标准差比较稳定，因此可以假设标准差 $\sigma=0.015$ 于是：这一天袋装糖重的总体 $X \sim N(\mu, 0.015^2)$，其中 μ 未知 问题是：根据样本值来判断 $\mu=0.5$，还是 $\mu \neq 0.5$，于是引出假设检验的概念 1° 提出两个相互对立的假设，即 $H_0: \mu = \mu_0 = 0.5,$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0,$ 2° 给出合理的法则，利用已知样本判断是接受假设 H_0 (即拒绝假设 H_1)，还是拒绝假设 H_0 (即接受假设 H_1) 如果作出的决策是接受 H_0，则认为 $\mu = \mu_0$，即认为机器工作是正常的。 检验方法(即合理的法则) 对于未知参数，仍然从其点估计量开始讨论，与其点估计量进行比较。 对于 μ，可以借助其估计量 $\bar{X}$ 来进行判断。$\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，$\bar{X}$ 的观察值 $\bar{x}$ 大小一定程度上反映了 μ 的大小，因此，如果假设 H_0 为真，则 $\bar{x}$ 与真实值 μ_0，的偏差 $\bar{x} - \mu_0$ 一般不应太大，若过分大，则有理由怀疑假设 H_0 的正确性而拒绝 H_0， 显然若 H_0 为真，则有 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，该函数的分布与任何未知量无关 衡量 $\bar{x} - \mu_0$ 可归结为衡量 $\frac{ \bar{X} - \mu_0 }{\sigma/\sqrt{n}}$ 的大小 基于以上思想，可适当选取一正数 k，使当	PPT 板书讲解 重点 启发 提问，关于分布
---	---

观察值 $\bar{x}$ 满足 $\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k$ 时就拒绝假设 H_0 ,

反之 $\bar{x}$ 满足 $\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < k$ 时就接受 H_0 。

如何选取 k 呢，先看以下事实：（一种错误）

由于作出决策的依据是一个样本，当实际上 H_0 为真时，仍可能作出拒绝 H_0 的决策，这种可能性是无法消除的。这是一种错误，称为“弃真”，犯这种错误的概率记为：

$P\{\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真}\}$

或 $P_{\mu_0}\{\text{拒绝 } H_0\}$ ：其中 $P_{\mu_0}\{\cdot\}$ 表示参数 μ 取 μ_0 时事件 $\{\cdot\}$ 的概率

或 $P_{\mu \in H_0}\{\text{拒绝 } H_0\}$ ：其中 $P_{\mu \in H_0}\{\cdot\}$ 表示参数 μ 取 H_0 规定的值时事件 $\{\cdot\}$ 的概率

该类错误的可能性无法消除，因此自然希望将犯这类错误的概率控制在一定限度之内，即给出一个较小的数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ ，使犯这类错误的概率不超过 α ，即使得：

$P\{\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真}\} \leq \alpha$

为了确定常数 k ，考虑统计量 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ，它的分布不依赖于任何未知参数，那么由最大

允许错误概率 α ，可令上式右端取等号，有

$P\{\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真}\} = P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq k\right\} = \alpha$

由于 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

则当 H_0 为真时，由标准正态分布的上 α 分位点定义易知 $k = z_{\alpha/2}$

所以当观察值 $\bar{x}$ 满足不等式 $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq k = z_{\alpha/2}$ 时则拒绝 H_0 ，反之接受 H_0

在例 1 中，取 $\alpha = 0.05$ ，则有 $k = z_{\alpha/2} = 1.96$

再有 $n = 9$ ， $\sigma = 0.015$ ， $\bar{x} = 0.511$ ，即有

$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = 2.2 \geq 1.96$

于是拒绝 H_0 ，认为这天包装机工作不正常

检验法的合理性

上述推断是符合**实际推断原理**的，因为通常 α 取的很小(0.01, 0.05...)，若 H_0 为真，

PPT

板书

PPT

对 α 的取值的实际

即当 $\mu = \mu_0$ 时

$$\left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq k = z_{\alpha/2} \right\} \text{是一个小概率事件}$$

由一次试验得到的观察值 $\bar{x}$ 满足上述不等式 $\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2}$ 几乎是不会发生的，现在竟然发生了，说明假设不正确，因而拒绝 H_0 ，反之则接受 H_0 。

总结以上实例：

在上例中，当样本容量 n 固定时，选定 α 后，数 k 可以确定，然后按照统计量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 的观察值的绝对值 $|z|$ 是大于等于 k ，还是小于 k 来作出决策，

k 是检验上述假设的一个门槛值

若 $|z| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq k$ ，则称 $\bar{x}$ 与 μ_0 的差异是**显著的**，以至于小概率事件发生了，这

时拒绝 H_0 ，

若 $|z| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < k$ ，则称 $\bar{x}$ 与 μ_0 的差异是不显著的，这时接受 H_0 ，

选定的数 α 称为**显著性水平**，在 α 下对显著性判断

统计量 $Z = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right|$ 称为**检验统计量**

第三部分：假设检验的相关定义（22 分钟）

像上例中的假设检验问题可叙述成：

“在显著性水平 α 下，检验假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ ”

或“在显著性水平 α 下，针对 H_1 检验 H_0 ”

H_0 称为**原假设**，或**零假设**，

H_1 称为**备择假设**，(在原假设被拒绝后可供选择的假设)

要进行的工作是根据样本，按上述检验方法做出决定在 H_0 和 H_1 之间接受其一

当检验统计量取某个区域 C 中的值时，我们拒绝原假设 H_0 ，则区域 C 称为拒绝域，

拒绝域的边界点称为**临界点**

上例中 $|z| \geq z_{\alpha/2}$ 为拒绝域， $z_{\alpha/2}$ 为临界点

检验法则是根据样本作出的，总有可能作出错误的决策，

在 H_0 实际上为真时，可能犯拒绝 H_0 的错误，称这类“弃真”的错误为**第 I 类**

意义依据
进行解释

PPT

强调检验
统计量的
要求

错误

当 H_0 实际上不为真时，可能犯接受 H_0 的错误，称这类“取伪”的错误为**第 II 类错误**，犯第 II 类错误的概率记为

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 不真时接受 } H_0\}$$

$$\text{或 } P_{\mu \in H_1}\{\text{接受 } H_0\}$$

在确定检测法则时应尽可能使犯两类错误的概率都小，但样本容量固定时减少犯弃真错误，往往会增加取伪，二者是矛盾的，除非增加样本容量。

一般情况下，我们总是控制犯第一类错误的概率，使他小于或等于 α ， α 通常取 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 等值，视情况而定

这种**只对犯第 I 类错误的概率加以控制，而不考虑犯第 II 类错误的概率的检验**，称为**显著性检验**

在显著性水平 α 下，如果给出的两个对立的假设如下形式：

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0,$$

则称为**双边备择假设**，相应的称该类假设检验问题为**双边假设检验**

其原因是：对于备择假设， μ 可以小于 μ_0 ，也可以大于 μ_0 ，

有时我们只关心总体均值是否增大，例如试验新工艺以提高材料强度，总体均值越大越好。需要检验假设

$$H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0,$$

则称为**右边检验**问题

类似的有时需要检验假设

$$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0,$$

则称为**左边检验**问题

左边检验和右边检验统称为**单边检验**

检验的分类是依据备择假设的形式给出的

第四部分：单边检验的拒绝域求解问题（10 分钟）

单边检验的拒绝域（这时原假设为真时被检参数是一个范围，而不是一个值）

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ 为已知， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本，给定显著性水平 α ，来求如下检验问题的拒绝域

右边检验： $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0,$

因 H_0 中的 μ 都比 H_1 中的要小，当 H_1 为真时观察值 $\bar{x}$ 往往偏大，因此拒绝域的形式为

二者不能同时都取得很小

PPT

板书

$\bar{x} \geq k$, k 是某一正常数

确定 k , 与例 1 中的做法类似

$$P\{H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} = P_{\mu \in H_0} \{\text{拒绝 } H_0\}$$

$$= P_{\mu \in H_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right\}$$

$$\leq P_{\mu \in H_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \geq \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right\} \quad \text{不等号成立是因为 } \mu \leq \mu_0$$

注意: 这里 $\bar{X}$ 的均值为 μ 而不是 μ_0 , 所以放缩成 μ 后才能用正态分布。

要控制

$$P\{H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} \leq \alpha,$$

$$\text{只需令 } P_{\mu \in H_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \geq \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right\} = \alpha$$

$$\text{由于 } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{得到 } \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = z_\alpha, \text{ 即 } k = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{即 } \bar{x} \geq k = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\text{即 } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_\alpha$$

类似的有左边检验问题的拒绝域

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_\alpha$$

第五部分: 参数的假设检验的一般步骤和习题(8 分钟)

处理参数的假设检验问题的步骤如下:

根据实际问题的要求提出原假设 H_0 和备择假设 H_1 :

1. 给定显著性水平 α , 以及样本容量 n
2. 确定检验统计量以及拒绝域的形式

其分布应与任何未知数无关, 且统计量里不含其它未知参数

统计量的构造一般的从点估计量开始考虑

3. 按 $P\{H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} \leq \alpha$ 求出拒绝域

单边时拒绝域的形式

重点讲解为什么放缩

边检验统计量比较

PPT

4. 取样, 根据样本观察值作出决策, 是接受 H_0 还是拒绝 H_0 例 2: 某工厂生产固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu=40\text{cm/s}$, $\sigma=2\text{cm/s}$, 现在用新方法生产了一批推进器, 从中随机取 $n=25$ 只, 测得燃烧率的样本均值为 $\bar{x}=41.25\text{cm/s}$, 设新方法下总体均方差没变, 问这批推进器的燃烧率较以往是否有显著的提高, 取显著性水平 $\alpha=0.05$ 解: 1° 提出原假设 H_0 和备择假设 H_1: $H_0: \mu \leq \mu_0 = 40$, 即假设新方法没有提高燃烧率 $H_1: \mu > \mu_0$, 即假设新方法提高了燃烧率 2° 给定显著性水平 $\alpha=0.05$, 以及样本容量 $n=25$ 3° 确定检验统计量以及拒绝域的形式 由例 1, 统计量为 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, 拒绝域的形式为 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \geq k$ 4° 按 $P\{H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} \leq \alpha$ 求出拒绝域 $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_{0.05} = 1.645$ 5° 取样, 根据样本观察值作出决策, 是接受 H_0 还是拒绝 H_0 现在 $z = \frac{41.25 - 40}{2 / \sqrt{25}} = 3.125 > 1.645$ z 落在拒绝域中, 在显著性水平 α 下拒绝 H_0, 因此新方法有显著提高 这部分包括教学环节(以组织节点和知识点为单位)、教师活动、学生活动、教学说明等。是教案的主体部分, 既体现出教学活动的逻辑程序, 又要划分出若干环节或步骤, 并考虑时间分配, 具体方法的应用, 相互间的衔接、过渡, 以及教学过程、板书和 PPT 课件的协调, 充分反映教师教学设计的思想, 体现教师的教学经验和风格 可先整体简单概述, 再对具体内容展开	Ppt
课后作业	
P ₂₁₈ : 2, 3, 5 ; 数值实验作业、其它要求	
课后小结	以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解 1. 显著性水平 α 取值的实际意义

	2.显著性检验中,假设 H_0 成立的条件下,控制范第一类错误的概率为小概率事件,从而得到拒绝域的思想等
--	--

	3.最优检验统计量
--	------------------

	4.单边检验时的拒绝域形式及求解过程,学生容易把点估计量的的均值误认为假设中的临界值
--	---

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____

所在单位_____

授课班级_____

专业_____

撰写时间_____

教案编号	22-0802	教案内容	8.2 /8.3 正态总体均值/方差的假设检验	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 掌握单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验的原理及应用。			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够根据试验或观察得到的数据来研究随机现象，运用参数估计和假设检验等基本的统计方法，对客观规律性做出合理的估计和判断，以解决实际问题。			
教学重点	u、t、F 统计量在单总体和双总体的参数假设检验中的应用；				
教学难点	假设检验统计量的构造方法				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述(5 分钟) 上节课我们学习了假设检验的基本原理和一般方法： 基本原理回顾 一般方法回顾 本次课主要讲解正态总体均值和方差的假设检验问题					板书
第二部分：单个正态总体均值的假设检验，（15 分钟） §2 正态总体均值的假设检验 假设检验是针对弃真这一可能犯的错误人为设定一个界限，如果在这个界限内，认为原假设成立，否则的话，由于显著性水平取得很小，表明小概率事件发生，根据实际推断原理，原假设不成立。 尽管也可能犯第 II 类取伪的错误，这时尽管总体的性质发生了改变但没有发现，往往影响较小。					PPT
(一)单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$均值 μ的检验					板书
1° σ^2 已知，关于 μ 的检验(z 检验)					板书

提出的假设,

双边: $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$,

单边: $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$,

$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$,

都是利用检验统计量

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \text{ 确定拒绝域的}$$

PPT

板书

这种检验法常称为 **Z 检验法**

2° σ^2 未知, 关于 μ 的检验(t 检验)

板书

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均未知, 求双边检验问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 的拒绝域。显著性水平为 α

PPT

构造检验统计量不能再用 1° 中的形式, 因为 σ 未知, 在区间估计里也提到过, 这种情况下以无偏估计 S 来代替 σ , 而采用如下检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

提问

当观察值 $|t| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right|$ 过分大时, 就拒绝 H_0

拒绝域的形式为 $|t| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| \geq k$

重点讲解

由 $P\{H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} = P_{\mu_0}\{\text{拒绝 } H_0\}$

$$= P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}\right| \geq k\right\} = \alpha,$$

得, $k = t_{\alpha/2}(n-1)$

单边的拒绝域查表 8.1

利用 t 统计量得出的检验法称为 **t 检验法**

例 1 某元件寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, 现测得 16 只元件的寿命如下:

PPT

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225 小时?

解: 按题意需检验假设

$H_0: \mu \leq \mu_0 = 225, H_1: \mu > 225$,

取 $\alpha = 0.05$ 。由表 8.1 知检验问题的拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1)$$

现在 $n=16$, $t_{0.05}(15)=1.7531$, 又算得 $\bar{x}=241.5$, $s=98.7259$, 即有

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = 0.6685 < 1.7531$$

t 没有落在拒绝域中, 故接受 H_0 , 即认为元件得平均寿命不大于 225 小时

第三部分: 两个正态总体均值差的检验 (15 分钟)

(二) 两个正态总体均值差的检验(t 检验)

两个正态总体具有相同的方差 σ^2 , 其中

$X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本

$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本

且设两样本独立。样本均值和方差分别为 $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$, 设 μ_1, μ_2, σ^2 均未知, 求假设检验问题:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta,$$

的拒绝域(δ 为已知常数), 取显著性水平为 α 。

解: 现已知道所提出的假设, 显著性水平和样本容量, 下面确定检验统计量

对于相互独立的方差相同的两个正态总体的均值差, 其有效的检验统计量显然是第六章定理四所给出的 t 统计量:

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \text{ 其中 } S_w \text{ 如第六章定理四所述}$$

确定拒绝域的形式:

$$\text{由假设是一个双边检验问题: 其拒绝域为 } \frac{|(\bar{x} - \bar{y}) - \delta|}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq k,$$

$$\text{由 } P\{H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} = P_{(\mu_1 - \mu_2) = \delta} \left\{ \frac{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta|}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq k \right\} = \alpha,$$

$$\text{可得 } k = t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\text{于是得到拒绝域为 } |t| = \frac{|(\bar{x} - \bar{y}) - \delta|}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$$

板书

PPT

板书

均值差的单边检验问题查表 8.1

当两个正态总体的方差已知时(不一定相等), 可采用 Z 检验法。

例 2 在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率, 试验是在同一只平炉上进行的。每炼一炉钢时除操作方法外, 其它条件都尽可能做到相同。先用标准方法炼一炉, 然后用建议的新方法炼一炉, 以后交替进行, 各炼了 10 炉, 得率分别为:

(1) 标准方法 78.1 72.4 76.2 74.3 77.4 78.4 76.0 75.5 76.7 77.3

(2) 新方法 79.1 81.0 77.3 79.1 80.0 79.1 79.1 77.3 80.2 82.1

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 且 μ_1, μ_2, σ^2 均未知。问建议的新操作方法能否提高得率。取 $\alpha=0.05$

解: 需要检验假设 $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0, H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$,

给定两样本容量 $n_1 = n_2 = 10$ 和显著性水平 $\alpha = 0.05$

采用 t 检验统计量, 拒绝域为

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - 0}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) = -t_{0.05}(10 + 10 - 2) = -1.7341$$

(注意取分布图形的左边区域)

并由两个样本计算出 $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$ 代入不等号左侧得 -4.295 在拒绝域内, 所以

拒绝 H_0 即认为建议的新操作方法较原来的方法为优。

第三部分 基于成对数据的检验 (15 分钟)

(三) 基于成对数据的检验 (t 检验)

有时为了比较两种产品, 或两种仪器, 两种方法等的差异, 我们常在相同条件下作对比实验, 得到一批成对的观察值, 然后分析观察数据作出判断, 这种方法常称为**逐对比较法**。

不是大量的重复试验, 而是采用不同方式的成对试验

例 3 有两台光谱仪 I_x, I_y , 用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著的差异, 制备了 9 件试块 (含量, 成份, 均匀性等各不相同) 现在分别用这两台仪器对每一试块测量一次, 得到 9 对观察值如下:

x%	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
y%	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
d=x-y%	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问, 能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异, 取显著性水平为 $\alpha = 0.01$

解: 分析:

1° 对于每台仪器, 测量的 9 个数据不是对同一个试块测出的, 各试块性质迥然

PPT

板书

PPT

不同，对应的随机变量不同分布，不能作为一个样本

即每个数据是对不同总体的测量值

2° 但是表中的每一对数据是对同一试块的测量，他们也因而不是相互独立的，而他们之间的差值可以看成是仅由两台仪器性能差异所导致，这一差值可以排除其它因素的干扰而只体现仪器性能差。因此将每一对数据的差值拿来，单独考虑性能差的影响，从而可以比较两台仪器的测量结果是否有显著的差异。

差值的性质重点强调

3° 一般的，设有 n 对相互独立的观察结果： $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ ，令 $D_1 = X_1 - Y_1, D_2 = X_2 - Y_2, \dots, D_n = X_n - Y_n$ ，则 $D_1, D_2, \dots, D_n$ 相互独立。又由于 $D_1, D_2, \dots, D_n$ 是由同一因素所引起的，可认为它们服从同一分布，今假设 $D_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$ ，即服从同一正态分布

该分布服从正态要解释

这样 $D_1, D_2, \dots, D_n$ 就构成了正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的一个样本，其中 μ_D, σ_D^2 未知，需要基于这一样本检验假设：

(这部分可讨论)

双边： $H_0: \mu_D = 0, H_1: \mu_D \neq 0$,

单边： $H_0: \mu_D \leq 0, H_1: \mu_D > 0$,

$H_0: \mu_D \geq 0, H_1: \mu_D < 0$,

分别记 $D_1, D_2, \dots, D_n$ 的样本均值和样本方差的观察值为 $\bar{d}, s_D^2$ ，则可利用单个正态总体的 t 检验法，得到拒绝域，设检验的显著性水平为 α ，查表 8.1，

$$\text{双边: } |t| = \left| \frac{\bar{d} - 0}{s_D / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1),$$

$$\text{右边: } t = \frac{\bar{d} - 0}{s_D / \sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1),$$

$$\text{左边: } t = \frac{\bar{d} - 0}{s_D / \sqrt{n}} \leq -t_{\alpha}(n-1),$$

对于本例来说，先作出 l_x, l_y 测量结果之差（列于表中第三行），按题意检验假设 $H_0: \mu_D = 0, H_1: \mu_D \neq 0$,

现在， $n=9, \alpha=0.01$

$$\text{拒绝域为 } |t| = \left| \frac{\bar{d} - 0}{s_D / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(8) = 3.3554$$

由观察值算得 $\bar{d}, s_D$ ，代入左边得 $|t| = \left| \frac{\bar{d} - 0}{s_D / \sqrt{n}} \right| = 1.467 < 3.3554$ ， t 值不落在拒绝域

内，故接受 H_0 ，认为两台仪器得测量结果并无显著差异。

第四部分：单个正态总体方差的假设检验(15 分钟)

§3 正态总体方差的假设检验

分单个总体和两个总体的情况

(一) 单个总体的情况

板书

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ, σ^2 均未知， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本。要求检验假设(显著性水平为 α):

双边检验问题 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$

σ_0^2 为已知常数

首先构造检验统计量，并给出拒绝域形式

S^2 是 σ^2 的无偏估计，于是检验统计量为

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

当 H_0 为真时，观察值 s^2 与 σ_0^2 的比值一般来说应在 1 附件摆动，而不应过分大于 1 或小于 1。

对于以上检验统计量，拒绝域的形式为

重点讲解

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq k_2$$

其中 k_1 和 k_2 的值由如下式确定

PPT

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真而拒绝 } H_0\} = P_{\sigma_0^2} \left\{ \left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \right) \cup \left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right) \right\} = \alpha$$

为计算方便，习惯上取

$$P_{\sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \right\} = \alpha/2, \quad P_{\sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right\} = \alpha/2$$

于是得到拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$$

对于单边检验问题： $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2,$

板书

H_0 中的全部 σ^2 都比 H_1 中的要小，因此，拒绝域的形式为

$$s^2 \geq k$$

重点讲解

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真而拒绝 } H_0\} = P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} \{s^2 \geq k\}$$

$$= P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} \right\}$$

$$\text{因为 } \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \leq P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} \right\} = \alpha$$

这个放缩
需呀重点
强调

即对任意的 $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ，上式都成立，临界点是最差的情况

$$\frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} = \chi_{\alpha}^2(n-1)$$

$$\text{即拒绝域为 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$$

类似的，左边检验问题： $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ ， $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ ，

$$\text{相应的拒绝域为 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$$

板书

以上检验法称为 χ^2 检验法

PPT

例1 某厂生产的某种型号的电池，寿命服从方差 $\sigma^2=5000$ 的正态分布，现有一批电池从它的生产情况来看，波动性有所改变，现随机取 26 只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2=9200$ 。问这一数据能否推断这批电池的寿命波动性较以往有显著变化（取 $\alpha=0.02$ ）

解：要求在水平 $\alpha=0.02$ 下检验假设

$$H_0: \sigma^2=5000, H_1: \sigma^2 \neq 5000,$$

$$\text{拒绝域为 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$$

$$\text{即 } \frac{25s^2}{5000} = s^2/200 \leq \chi_{0.99}^2(25) = 11.524 \text{ 或 } \frac{25s^2}{5000} = s^2/200 \geq \chi_{0.01}^2(25) = 44.314$$

由观察值 $s^2=9200$ 代入 $\frac{25s^2}{5000} = s^2/200 = 46$ 在拒绝域内，拒绝 H_0 ，认为有显著变化。

第五部分 两个正态总体的情况（20 分钟）

板书

（二）两个总体的情况

PPT

设 $X_1, X_2, \dots, X_{n1}$ 是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本

$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n1}$ 是来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本

且设两样本独立。样本方差分别为 S_1^2, S_2^2 ，设 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知，需要检验假设问题：

$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ 的拒绝域 (δ 为已知常数)，取显著性水平为 α 。

拒绝域的形式:

当 H_0 为真时 $E(S_1^2) = \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 = E(S_2^2)$

当 H_1 为真时 $E(S_1^2) = \sigma_1^2 > \sigma_2^2 = E(S_2^2)$

当 H_1 为真时, 观察值 S_1^2 / S_2^2 有偏大的趋势, 所以拒绝域为

$$s_1^2 / s_2^2 \geq k$$

$$\text{由 } P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真而拒绝 } H_0\} = P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2} \{S_1^2 / S_2^2 \geq k\}$$

$$\text{因为 } \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2} \left\{ \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \geq k \right\} = \alpha$$

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$\text{所以 } k = F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$$

所以拒绝域的形式为 $s_1^2 / s_2^2 \geq F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$

称为 **F 检验法**

例 2 § 2 例 2,

需要检验假设: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

取显著性水平 $\alpha = 0.01$, 两样本容量 $n_1 = n_2 = 10$

解: 双边检验,

当 H_0 为真时, $\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} = S_1^2 / S_2^2$ 该值应在 1 附近摆动, 不应过大也不应过小, 所

以拒绝域的形式为, $(S_1^2 / S_2^2 \leq k_1) \cup (S_1^2 / S_2^2 \geq k_2)$ 取两端均为 $\alpha/2$, 有

$$\text{拒绝域为 } s_1^2 / s_2^2 \geq F_{0.005}(10-1, 10-1) = 6.54$$

$$\text{或 } s_1^2 / s_2^2 \leq F_{1-0.005}(10-1, 10-1) = 1 / F_{0.005}(10-1, 10-1) = 1/6.54$$

代入观察值后得到 $s_1^2 / s_2^2 = 3.325 / 2.225 = 1.49$ 不在拒绝域内, 故接受 H_0 , 认为两总体方差相等, 也称为两总体方差具有**方差齐性**。

总结 (5 分钟)

这部分包括教学环节(以组织节点和知识点为单位)、教师活动、学生活动、教学说明等。是教案的主体部分, 既体现出教学活动的逻辑程序, 又要划分出若干环节或步骤, 并考虑时间分配, 具体方法的应用, 相互间的衔接、过渡, 以及教学过程、板书和 PPT

课件的协调，充分反映教师教学设计的思想，体现教师的教学经验和风格 可先整体简单概述，再对具体内容展开	
课后作业	P_{219}: 7, 9, 12, 16, 19 ; 数值实验作业、其它要求
课后小结	成对数据的检验中，使用正态分布的原因认真讲解

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____ 所在单位_____

授课班级_____ 专业_____ 撰写时间_____

教案编号	23-0803	教案内容	8.6 分布拟合检验	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 掌握以 χ^2 检验法为基础的单总体分布拟合检验的原理及应用。			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够根据试验或观察得到的数据来研究随机现象，运用参数估计和假设检验等基本的统计方法，对客观规律性做出合理的估计和判断，以解决实际问题。			
教学重点	χ^2 统计量作分布拟合检验的基本思想和应用。				
教学难点	皮尔逊定理及其应用				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述(5 分钟) 前面我们主要学习了对总体参数的假设检验： 主要是在总体形式已知，参数未知的前提下，对参数进行假设检验 在很多情况下对总体的分布形式可能也是未知的，需要对总体符合什么分布进行检验。 本次课主要讲解分布拟合检验的相关问题					板书
第二部分：单个分布的χ^2 拟合检验法，（35 分钟） §6 分布拟合检验 上面介绍的各种检验法都是在总体分布形式为已知的前提下进行讨论的。但在实际问题中，有时不能知道总体服从什么类型的分布，这时就需要根据样本来检验关于分布的假设。本节介绍 χ^2 拟合检验法。它可以用来检验总体是否具有某一个指定的分布或属于某一个分布族，还介绍专用于检验分布是否为正态的“偏度、峰度检验法”。 （一）单个分布 χ^2 的拟合检验法 设总体 X 的分布未知， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自 X 的样本值。我们来检验假设 H_0 :总体 X 的分布函数为 $F(x)$					PPT
(6.1)					板书

H_1 : 总体 X 的分布函数不是 $F(x)$

其中设 $F(x)$ 不含未知函数。(也常以分布律或概率密度代替 $F(x)$)

下面来定义检验统计量。将在 H_0 下 X 可能取值的全体 Ω 分成互不相交的子集 $A_1, A_2, \dots, A_k$, 以 $f_i (i=1, 2, \dots, k)$ 记样本观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中落在 A_i 的个数, 这表示事件 $A_i = \{X \text{ 的值落在子集 } A_i \text{ 内}\}$ 在 n 次独立试验中发生 f_i 次, 于是在这 n 次试验中事件 A_i 发生的频率为 f_i/n 。另一方面, 当 H_0 为真时, 我们可以根据 H_0 中所假设的 X 的分布函数来计算事件 A_i 的概率, 得到 $p_i = P(A_i) (i=1, 2, \dots, k)$ 。频率 f_i/n 与概率 p_i 会有差异, 但一般来说, 当 H_0 为真, 且试验的次数又甚多时, 这种差异不应太大, 因此 $(f_i/n - p_i)^2$ 不应太大。我们采用形如

$$\sum_{i=1}^k C_i \left(\frac{f_i}{n} - p_i \right)^2$$

(6.2)

的统计量来度量样本与 H_0 中所假设的分布的吻合程度, 其中 $C_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为给定的常数。皮尔逊证明, 如果选取 $C_i = n/p_i (i=1, 2, \dots, k)$, 则由(6.2)定义的统计量具有下述定理中所述的简单性质。于是我们就采用

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} \left(\frac{f_i}{n} - p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^k \frac{f_i^2}{np_i} - n \quad (6.3)$$

作为检验统计量。

定理 若 n 充分大, 则当 H_0 为真时统计量(6.3)近似服从 $\chi^2(k-1)$ 分布。(证略)

据以上的讨论, 当 H_0 为真时, (6.3)式中的 χ^2 不应太大, 如 χ^2 过分大就拒绝 H_0 , 拒绝域的形式为

$$\chi^2 \geq G \quad (G \text{ 为正常数})$$

对于给定的显著水平 α , 确定 G 使

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} = P_{H_0}\{\chi^2 \geq G\} = \alpha$$

由上述定理得 $G = \chi_{\alpha}^2(k-1)$ 。即当样本观察值使(6.3)式中的 χ^2 的值有

$$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(k-1),$$

则在显著性水平 α 下拒绝 H_0 ; 否则就接受 H_0 。这就是单个分布的 χ^2 拟合检验法。

χ^2 拟合检验法是基于上述定理得到的, 所以使用时必须注意 n 不能小于 50。另外 np_i 不能太小, 应有 $np_i \geq 5$, 否则应适当合并 A_i , 以满足这个要求(见下例)。

例 1 下表列出了某一地区在夏季的一个月中由 100 个气象站报告的雷暴雨的次数。

i	0	1	2	3	4	5	≥ 6
f_i	22	37	20	13	6	2	0
A_i	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6

其中 f_i 是报告雷暴雨次数为 i 的气象站数。试用 χ^2 拟合检验法检验雷暴雨的次数 X 是否服从均值 $\lambda=1$ 的泊松分布(取显著性水平 $\alpha=0.05$)。

解 按题意需检验假设

$$H_0: P\{X=i\} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \frac{e^{-1}}{i!}, \quad i=0, 1, 2, \dots$$

在 H_0 下 X 所有可能取的值为 $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, 将 Ω 分成如表所示的两两不相交的子集 $A_1, A_2, \dots, A_6$, 则有 $P\{X=i\}$ 为

PPT

重点讲皮
尔逊定理

PPT

$$p_i = P\{X=i\} = \frac{e^{-1}}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

例如

$$p_0 = P\{X=0\} = e^{-1} = 0.36788,$$

$$p_3 = P\{X=3\} = \frac{e^{-1}}{3!} = 0.06131,$$

$$p_6 = P\{X \geq 6\} = 1 - \sum_{i=0}^5 p_i = 0.059.$$

$$n=100$$

表 8-2 例 1 的 χ^2 拟合检验计算表

A_i	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/(np_i)$
$A_0: \{X=0\}$	22	e^{-1}	36.788	13.16
$A_1: \{X=1\}$	37	e^{-1}	36.788	37.21
$A_2: \{X=2\}$	20	$e^{-1}/2$	18.394	21.75
$A_3: \{X=3\}$	13	$e^{-1}/6$	6.131	54.92
$A_4: \{X=4\}$	6	$e^{-1}/24$	1.533	
$A_5: \{X=5\}$	2	$e^{-1}/120$	0.307	
$A_6: \{X=6\}$	0	$1 - \sum_{i=0}^5 p_i$	0.059	

$\Sigma=127.04$

区间的合并问题

计算结果如表 8-2 所示，其中有些行 $np_i < 5$ 的组予以适当合并，使得每组均有 $np_i \geq 5$ ，如表中第 4 列花括号所示。并组后 $k=4$ χ^2 的自由度为 $k-1=4-1=3$ 。

$\chi_{0.05}^2(k-1) = \chi_{0.05}^2(3) = 7.815$ 。现在 $\chi^2 = 127.04 - 100 = 27.04 > 7.815$ ，故在显著性水平 0.05 下拒绝 H_0 ，认为样本不是来自均值 $\lambda=1$ 的泊松分布。

例 2 在研究牛的毛色与牛角的有无，这样两对性状分离现象时，用黑色无角牛与红色有角牛杂交，子二代出现黑色无角牛 192 头，黑色有角牛 78 头，红色无角牛 72 头，红色有角牛 18 头，共 360 头，问这两对性状是否符合孟德尔遗传规律中 9: 3: 3: 1 的遗传比例？

解 现将题中的数据列表如下

序号	1	2	3	4
种类	黑色无角	黑色有角	红色无角	红色有角
数量	192	78	72	18
A_i	A_1	A_2	A_3	A_4

以 X 记各种牛的序号，按题意需检验各类牛的头数符合比例 9: 3: 3: 1，即 $(9/16): (3/16): (3/16): (1/16)$ 。需检验假设：

$H_0: X$ 的分布律为

X	1	2	3	4
p_k	9/16	3/16	3/16	1/16

取显著性水平为 0.1. 所需计算列在表 8-3 中 ($n=360$).

表 8-3 例 2 的 χ^2 检验计算表

A_i	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/(np_i)$
A_1	192	9/16	$360 \times 9/16 = 202.5$	$192^2/202.5 = 182.04$
A_2	78	3/16	$360 \times 3/16 = 62.7$	$78^2/62.7 = 90.13$
A_3	72	3/16	$360 \times 3/16 = 62.7$	$72^2/62.7 = 76.8$
A_4	18	1/16	$360 \times 1/16 = 22.5$	$28^2/22.5 = 14.4$

现在 $\chi^2 = 363.37 - 360 = 3.37$, $k=4$, $\chi_{0.1}^2(4-1) = 6.251 > 3.37$, 故接受 H_0 , 认为两性状符合孟德尔遗传规律中 9: 3: 3: 1 的遗传比例.

第三部分 分布族的 χ^2 拟合检验法(40 分钟)

(二) 分布族的 χ^2 拟合检验

在 (一) 中要检验的原假设是 H_0 : 总体 X 的分布函数是 $F(x)$, 其中 $F(x)$ 是已知的, 这种情况是不多的. 我们经常遇到的所需检验的原假设是

$$H_0: \text{总体 } X \text{ 的分布函数是 } F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), \quad (6.4)$$

其中 F 的形式已知, 而 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ 是未知参数, 它们在某一个范围取值. 在 $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ 中当参数 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ 取不同的值时, 就得到不同的分布, 因而 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ 代表一族分布. (6.4) 中的 H_0 表示总体 X 的分布属于分布族 $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$. 采用类似 (一) 中的方法来定义检验统计量, 将在 H_0 下 x 可能取值的全体 Ω 分成 k , ($k > r+1$) 个互不相交的子集 $A_1, A_2, \dots, A_k$, 以 f_i ($i=1, 2, \dots, k$) 记样本观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 落在 A_i 的个数, 则事件 $A_i = \{X \text{ 的值落在 } A_i \text{ 内}\}$ 的频率为 f_i/n . 另一方面, 当 H_0 为真时, 由 H_0 所假设的分布函数来计算 $P\{A_i\}$, 得到 $P\{A_i\} = p_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = p_i(\theta) = p_i$. 此时, 需先利用样本求出未知参数的最大似然估计 (在 H_0 下), 以估计值作为参数值, 求出 p_i 的估计值

$\hat{p}_i = \hat{P}(A_i)$, 在 (6.3) 式中以 $\hat{p}_i$ 代替 p_i , 取

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{f_i^2}{n\hat{p}_i} - n \quad (6.5)$$

作为检验假设 H_0 的统计量. 可以证明, 在某些条件下, 在 H_0 为真时近似地有

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{f_i^2}{n\hat{p}_i} - n \sim \chi^2(k-r-1)$$

与在 (一) 中一样可得假设检验问题 (6.4) 的拒绝域为

$$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(k-r-1) \quad (6.6)$$

α 为显著性水平. 以上就是用来检验分布族的 χ^2 拟合检验法.

例 3 在一实验中, 每隔一定时间观察一次由某种铀所放射的到达计数器上的 α 粒子数 X , 共观察了 100 次, 得结果如下表:

表 8-4 铀放射的到达计数器上的 α 粒子数的实验记录

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	≥ 12
f_i	1	5	16	17	26	11	9	9	2	1	2	1	0
A_i	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}

其中 f_i 是观察到有 i 个 α 粒子的次数. 从理论上考虑知 X 应服从泊松分布

这部分可选讲, 使学生了解即可, 重点强调, 要先估计在检验, 而且使用皮尔逊定理时 χ^2 的自由度

$$P\{X=i\} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}, i=0,1,2,\dots \quad (6.7)$$

问(6.7)式是否符合实际(取 $\alpha=0.05$)? 即在显著性水平 0.05 下检验假设

$$H_0: \text{总体 } X \text{ 服从泊松分布 } P\{X=i\} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}, i=0,1,2,\dots$$

解 因在 H_0 中参数 λ 未具体给出, 所以先估计 λ . 由最大似然估计法得

$\hat{\lambda} = \bar{x} = 4.2$. 在 H_0 假设下, 即在 X 服从泊松分布的假设下, X 所有可能取的值为 $\Omega = \{0,1,2,\dots\}$, 将 Ω 分成如表 8-4 所示的两两不相交的子集 $A_0, A_1, \dots, A_{12}$. 则 $P\{X=i\}$ 有估计

$$\hat{p}_i = \hat{P}\{X=i\} = \frac{4.2^i e^{-4.2}}{i!}, i=0,1,2,\dots$$

$$\text{例如 } \hat{p}_0 = \hat{P}\{X=0\} = e^{-4.2} = 0.015$$

$$\hat{p}_3 = \hat{P}\{X=3\} = \frac{4.2^3 e^{-4.2}}{3!} = 0.185$$

$$\hat{p}_{12} = \hat{P}\{X \geq 12\} = 1 - \sum_{i=0}^{11} \hat{p}_i = 0.002$$

表 8-5 例 3 的 χ^2 拟合检验计算表

A_i	f_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$f_i^2/(n\hat{p}_i)$
A_0	1	0.015	1.5	4.615
A_1	5	0.063	6.3	
A_2	16	0.132	13.2	19.394
A_3	17	0.185	18.5	15.622
A_4	26	0.194	19.4	34.845
A_5	11	0.163	16.3	7.423
A_6	9	0.114	11.4	7.105
A_7	9	0.069	6.9	11.739
A_8	2	0.036	3.6	5.538
A_9	1	0.017	1.7	
A_{10}	2	0.007	0.7	
A_{11}	1	0.003	0.3	
A_{12}	0	0.002	0.2	

$\Sigma = 106.282$

计算结果如表 8-5 所示, 其中有些门户 $n\hat{p}_i < 5$ 的组予以适当合并, 使得每组均有 $n\hat{p}_i \geq 5$, 如表中第四列花括号所示. 此处, 并组后 $k=8$, 但因在计算概率时, 估计了一个参数 λ , 故 $r=1$, χ^2 的自由度为 $8-1-1=6$. $\chi_{0.05}^2(k-r-1) = \chi_{0.05}^2(6) = 12.592$, 现在 $\chi^2=106.281-100=6.281 < 12.592$, 故在显著性水平 0.05 下接受 H_0 . 即认为样本来自泊松

分布总体，也就是说认为理论上的结论是符合实际的。

注意 本题答案是“接受 H_0 ，认为总体 X 的分布属于泊松分布族，即认为 $X \sim \pi(\lambda)$ ”，亦即“认为必有某一个参数 λ_0 ， $X \sim \pi(\lambda_0)$ ”，而不能将答案误写成“ X 服从以 $\lambda = 4.2$ 为参数的泊松分布”。

例 4 自 1965 年 1 月 1 日至 1971 年 2 月 9 日共 2231 天中，全世界记录到里氏震级 4 级和 4 级以上地震计 162 次，统计如下：

相继两次地震 间隔天数 x	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	≥ 40
出现的频数	50	31	26	17	10	8	6	6	8 ^①

这里 8 个数值是 40,43,44,49,58,60,81,109

试检验相继两次地震间隔的天数 x 服从指数分布($\alpha=0.05$)。

解 按题意需检验假设

H_0 : X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (6.7)$$

在这里， H_0 中的参数 θ 未给出，先由最大似然估计法求得 θ 的估计为 $\hat{\theta} = \bar{x} = 2231/162 = 13.77$ 。在 H_0 下， x 可能取值的全体 Ω 为区间 $[0, \infty)$ 。将区间 $[0, \infty)$ 分为 $k=9$ 个互不重叠的小区间： $A_1=[0,4.5]$ ， $A_2=(4.5, 9.5]$ ，...， $A_9 = (39.5, \infty)$ ，如表 8-6 第二列所示，若 H_0 为真， x 的分布函数的估计为

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/13.77}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

由上式可得概率 $p_i = P(A_i)$ 的估计：

$$\hat{p}_i = \hat{P}(A_i) = \hat{P}\{a_i < x \leq a_{i+1}\} = \hat{F}(a_{i+1}) - \hat{F}(a_i).$$

例如

$$\hat{p}_2 = \hat{P}(A_2) = \hat{P}\{4.5 < x \leq 9.5\} = \hat{F}(9.5) - \hat{F}(4.5) = 0.2196$$

而

$$\hat{p}_9 = \hat{P}(A_9) = 1 - \sum_{i=1}^8 \hat{P}(A_i) = 0.0568$$

将计算结果列表如下

表 8-6 例 4 的 χ^2 检验计算表

A_i	f_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$f_i^2/(n\hat{p}_i)$
$A_1:0 \leq x \leq 4.5$	50	0.2788	45.1656	55.3519
$A_2:4.5 \leq x \leq 9.5$	31	0.2196	35.5752	27.0132
$A_3:9.5 \leq x \leq 14.5$	26	0.1527	24.7374	27.3270
$A_4:14.5 \leq x \leq 19.5$	17	0.1062	17.2044	16.7980
$A_5:19.5 \leq x \leq 24.5$	10	0.0739	11.9718	8.3530
$A_6:24.5 \leq x \leq 29.5$	8	0.0514	8.3268	7.6860
$A_7:29.5 \leq x \leq 34.5$	6	0.0358	5.7996	6.2073
$A_8:34.5 \leq x \leq 39.5$	6	0.0248	4.0176	14.8269
$A_9:39.5 \leq x \leq \infty$	8	0.0568	9.2016	

$\Sigma=163.5633$

现在 $\chi^2=163.5633-162=1.5633$, 因为

$$\chi_{0.05}^2(k-r-1) = \chi_{0.05}^2(8-1-1) = \chi_{0.05}^2(6) = 12.592 > 1.5633$$

故在显著性水平 0.05 下接受 H_0 , 认为 x 服从指数分布.

例 5 对于第六章 §2 例 1 中的数据, 试检验它们是否来自正态总体 X (取显著性水平 $\alpha=0.1$).

解 需检验假设

$H_0: X$ 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$$

因在 H_0 中未给出 μ, σ^2 的数值, 需先估计 μ, σ^2 . 由最大似然估计法得 μ, σ^2 的估计值为 $\hat{\mu} = 143.8$, $\hat{\sigma}^2 = (6.0)^2$. 我们将在 H_0 下 X 可能取值的区间 $(-\infty, \infty)$ 分为 7 个小区间, 并取事件 A_i 如表 8-7 中第一列所示. 若 H_0 为真 X 的概率密度的估计为

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}6} e^{-\frac{(x-143.8)^2}{2 \cdot 6^2}}, -\infty < x < \infty$$

按上式并查标准正态分布的分布函数表即可得概率 $P(A_i)$ 的估计, 例如

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 &= \hat{P}(A_2) = \hat{P}\{129.5 < x \leq 134.5\} = \Phi\left(\frac{134.5-143.8}{6}\right) - \Phi\left(\frac{129.5-143.8}{6}\right) \\ &= \Phi(-1.55) - \Phi(-2.38) = 0.0519 \end{aligned}$$

将计算结果列表如下:

表 8-7 例 5 的 χ^2 检验计算表

A_i	f_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$f_i^2/(n\hat{p}_i)$
$A_1: x \leq 129.5$	1	0.0087	0.73	4.91
$A_2: 129.5 < x \leq 134.5$	4	0.0519	4.36	
$A_3: 134.5 < x \leq 139.5$	10	0.1752	14.72	6.79
$A_4: 139.5 < x \leq 144.5$	33	0.3120	26.21	41.55
$A_5: 144.5 < x \leq 149.5$	24	0.2811	23.61	24.40
$A_6: 149.5 < x \leq 154.5$	9	0.1336	11.22	10.02
$A_7: 154.5 < x < \infty$	3	0.0375	3.15	

现在 $\chi^2=87.67-84=3.67$, 因为

$$\chi_{0.1}^2(k-r-1) = \chi_{0.1}^2(5-2-1) = \chi_{0.1}^2(2) = 4.605 > 3.67$$

$$X_{0.1}^2(k-r-1) = X_{0.1}^2(5-2-1) = X_{0.1}^2(2) = 4.605 > 3.67$$

故在水平 0.1 下接受 H_0 , 即认为数据来自正态分布总体.

本章小节(10 分钟)

假设检验 定性: 对总体的某些性质进行定性判断 分为两类: $\begin{cases} \text{对总体分布的检验} \\ \text{总体分布形式已知, 而对参数的检验} \end{cases}$ 应用方向: 产生总体的环境条件、工艺等发生变化时, 对总体是否改变进行判断		假设检验一般方法
基本思想:	1° 提出假设	1° 提出假设
	2° 给出合理的检验法则	2° 给出显著性水平 α 和样本容量 n
	3° 在假设 H_0 为真的情况下, 描述前述小概率事件	3° 给出检验统计量和拒绝域形式
	4° 依照检验统计量的分布, 通过上 α 分位点, 求出拒绝域, 即求出临界点 k	4° 由弃真小概率确定拒绝域
原假设H_0 备择假设H_1 双边备择假设: 常用于点值的假设 $H_0: \mu=\mu_0; H_1: \mu \neq \mu_0$ 单边备择假设: 常用于范围的假设 左边检验: $H_0: \mu \geq \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$ 右边检验: $H_0: \mu \leq \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$ 基本原理: 实际推断原理, 即构造一个关于备择假设H_1的小概率事件, 若H_1仍然发生了, 则小概率事件发生, 说明总体性质已改变, 否则原假设成立 小概率事件的构造方法: 来源于对犯第一类错误的控制, 即$P(H_0 \text{为真而拒绝} H_0) = \alpha$, 其中$\alpha$是一个小概率值 检验统计量$Z$: 一般由点估计量获得, 要求分布已知, 不含任何未知参数, 与μ_0有关 写出拒绝域形式: 双边: $Z \geq k$, 取检验统计量的上$\alpha/2$分位点, 查表 单边: $Z \geq k$, 或者 $Z \leq k$ 先由待检参数的点估计量给出形式, 再用放缩法求得相应分位点, 查表		5° 给出决策, 决定接受哪个假设
正态分布总体的假设检验	1° 正态总体均值的假设检验	1) 单个总体$N(\mu, \sigma^2)$均值μ的假设检验: (a) σ^2已知: Z检验: $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ (b) σ^2未知: T检验: $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 2) 两个正态总体均值差$\mu_1 - \mu_2$: (a) σ_1^2, σ_2^2已知 Z检验 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$ (b) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知时 T检验 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ 3) 基于成对数据的T检验: $N(\mu_D, \sigma_D^2), D_i = (x_i - y_i), i = 1, \dots, n$ 一般检验$\mu_D = 0$ $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$
	2° 正态总体方差的假设检验	1) 单个总体$N(\mu, \sigma^2)$方差σ^2的假设检验: χ^2检验 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 2) 两个总体方差比σ_1^2/σ_2^2的假设检验: F检验 $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$ 拒绝域的形式为 $S_1^2/S_2^2 \geq k$
		单边的拒绝域形式为点估计量的表达式: 如$\bar{X} > k$ 代入犯第I类错误的小概率表达式 $P_{\mu < \mu_0} \{ \bar{X} > k \} = \alpha$ 原假设$\mu = \mu_0$为真时 $= P_{\mu < \mu_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{k - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right\}$ 放缩后 $\leq P_{\mu < \mu_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right\} = \alpha$ 由检验统计量的分布即可求出k

这部分包括教学环节(以组织节点和知识点为单位)、教师活动、学生活动、教学说明等。是教案的主体部分, 既体现出教学活动的逻辑程序, 又要划分出若干环节或步骤, 并考虑时间分配, 具体方法的应用, 相互间的衔接、过渡, 以及教学过程、板书和 PPT 课件的协调, 充分反映教师教学设计思想, 体现教师的教学经验和风格

可先整体简单概述, 再对具体内容展开

课后作业

P_{221} : 23, 24, 27, 28 ; 其它要求

课后小结