

授课班级 专业 撰写时间

教案编号	18-0702	教案内容	7.3 估计量的评选标准；	学时	1
教学目标	基本要求	(1) 会判断估计量的无偏性、有效性的概念，理解一致性的概念；			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够根据试验或观察得到的数据来研究随机现象，运用参数估计和假设检验等基本的统计方法，对客观规律性做出合理的估计和判断，以解决实际问题。			
教学重点	分布参数估计量的评价准则				
教学难点					
教学方法	提问、讨论、讲授、启发、示例、板书、PPT				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述(7 分钟) 在上一节中，我们学习了分布参数的点估计。根据估计量的选取方法不同，我们重点学习了矩估计和最大似然估计。 由点估计的两种典型求估计量的方法可知，同一参数用不同的估计方法，求出的估计量可能不同。 比如 θ 可以是前 k 阶样本矩的函数（假设有 k 个待估参数），也可以是样本似然函数的极点或在取值范围内的最值点 如均匀分布中关于区间两个端点的矩估计量和最大似然估计量就不同。 尽管原则上，任何统计量都可以作估计量，但总有好坏之分，希望在合理的标准下选择最理想的估计量： 本节学习三个常用的评选标准：无偏性，有效性，相合性(一致性) 第二部分：无偏性（18 分钟） 1° 无偏性——数学期望评选标准 意义：估计量是随机变量，其所取估计值应以待估参数真值为中心摆动，并且大量					板 书， 回 顾 PPT

估计值的统计平均值应该稳定于参数真值，也就是估计量的数学期望应该等于参数真值

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 X 的一个样本， $\vartheta \in \Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数这里 Θ 是 ϑ 的取值范围。

无偏性 若估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意的 $\vartheta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \vartheta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 是 ϑ 的无偏估计量。

即 $E(\hat{\theta}) - \vartheta = 0$,

称 $E(\hat{\theta}) - \vartheta$ 为以 $\hat{\theta}$ 作为 ϑ 的估计的**系统误差**，那么无偏估计的实际意义就是无系统误差。（人为的或系统本身原因导致的误差，而不是测量误差）

例如：设总体 X 的 k 阶矩，期望和方差分别为 μ_k, μ, σ^2

由于 $E(A_k) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_k = \mu_k$

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \sigma^2,$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \mu$$

所以 k 阶样本矩，样本方差和样本均值分别为 k 阶总体矩 μ_k ，方差 σ^2 和期望 μ 的无偏估计量

而 σ^2 的一个估计量 $\hat{\sigma}^2 = B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 由于

$$E(B_2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2, \text{ 因而是有偏的}$$

其中，由方差恒等式 $E(X^2) = D(X) + E(X)^2$

$$E(B_2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - E(\bar{X}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2/n + \mu^2)$$

因此，一般取 S^2 作为总体方差的无偏估计量

例 2：设总体 X 服从参数为 ϑ 的指数分布， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 X 的一个样本，试证： $\bar{x}$ 和 $nZ = n[\min(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ 都是 ϑ 的无偏估计量

证：1° 显然有 $E(\bar{x}) = E(X) = \vartheta$ ，成立

2° $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 具有概率密度 $1 - [1 - F(x)]^n = 1 - [1 - (1 - e^{-x/\vartheta})]^n$

$$f_{\min}(x; \vartheta) = \begin{cases} \frac{n}{\vartheta} e^{-nx/\vartheta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \text{ 故有 } E(Z) = \vartheta/n,$$

所以 $E(nZ) = \vartheta$ ，也成立

一个参数可以有不同的无偏估计量。那么进一步的这两个无偏估计量哪一个

更好些呢，这引出了以下标准

第三部分：有效性（10 分钟）

2° 有效性——方差评选标准（分散度）(评选的前提是二者首先是无偏的)

意义：待估参数可能有多个无偏估计量，但也有优劣之分

对于两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ ，在样本容量 n 相同的条件下，哪一个估计量的观察值更密集在真值 ϑ 附近，认为哪一个更为理想。估计值与真值具有较大偏差的概率就更小些。

由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度的度量，这样在**无偏的情况下** $E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\vartheta$ ，以方差小者为好，即估计量的有效性

有效性 设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是 ϑ 的无偏估计量，若对于任意 $\vartheta \in \Theta$ ，有 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$ 且至少对于某一个 $\vartheta \in \Theta$ ，**上式中的不等号成立**，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效。

例 2 中的两个估计量的有效性

由于总体 X 的方差 $D(X)=\vartheta^2$ ，因而有 $D(\bar{x})=D(X)/n=\vartheta^2/n$

而由 $D(nZ)=n^2D(Z)=n^2(\vartheta^2/n^2)=\vartheta^2$ ，所以 $D(nZ) > D(\bar{x})$ ，所以 $\bar{x}$ 较 nZ 有效

第四部分 相合性（10 分钟）

3° 相合性——样本容量极限评选标准

在样本 n 固定情况下，无偏性和有效性都满足的估计量，其取值仍然是在真值附近摆动，我们希望**随着样本容量 n 的增大，一个估计量的值稳定于待估参数的真值**。

相合性 设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为参数 ϑ 的估计量，若对于任意 $\vartheta \in \Theta$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 依概率收敛于 ϑ ，则称 $\hat{\theta}$ 为 ϑ 的**相合估计量**

即，若对于任意的 $\vartheta \in \Theta$ 都满足：对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \vartheta| < \varepsilon\} = 1$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 ϑ 的相合估计量。

例如：样本 k 阶矩依概率收敛于总体 k 阶矩，样本 k 阶矩是总体 k 阶矩的相合估计量，进一步的若待估参数 $\vartheta = g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ ，则 ϑ 矩估计量 $\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_k) =$

$g(A_1, A_2, \dots, A_k)$ 是 ϑ 的相合估计量。 ※ 由最大似然估计法得到的估计量，在一定条件下也具有相合性 ※ 相合性是对一个估计量的基本要求，若估计量不具有相合性，那么不论将样本容量 n 取得多么大，都不能将 ϑ 估计得足够准确，因而不可取 可以用大数定律的思想处理。	
课后作业	包括课后作业、数值实验作业、其它要求
课后小结	课后小结是教案执行情况的经验总结，目的在于改进和调整教案，为下一轮课讲授设计更加良好的教学方案。应全面审视教学过程，特别注意对意外发现、点滴收获、以及因个别疏漏而及时补充的方法等方面的内容进行撰写

授课班级 专业 撰写时间

[illegible]

区间估计的两个要素：一个是区间，一个是置信水平

置信区间：设总体 X 的分布函数 $F(x;\vartheta)$ 含有一个未知参数 ϑ , $\vartheta \in \Theta$ (Θ 是 ϑ 的可能的取值范围), 对于给定值 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 若由来自 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ($\underline{\theta} < \bar{\theta}$), 对于任意 $\vartheta \in \Theta$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) < \vartheta < \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)\} \geq 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是 ϑ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的**置信区间**, $\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 分别称为置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间的**置信下限**和**置信上限**, $1 - \alpha$ 称为**置信水平**

说明:

当 X 是连续型随机变量时, 对于给定的 α , 总是按要求 $P\{\underline{\theta} < \vartheta < \bar{\theta}\} = 1 - \alpha$ 求出置信区间。

当 X 是离散型随机变量时, 对于给定的 α , 常常找不到区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 使得 $P\{\underline{\theta} < \vartheta < \bar{\theta}\}$ 恰为 $1 - \alpha$, 此时去找区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 使得 $P\{\underline{\theta} < \vartheta < \bar{\theta}\}$ 至少为 $1 - \alpha$, 且尽可能的接近 $1 - \alpha$ 。

含义：对于任何一个样本所确定的一个置信区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, 它包含待估参数真值的概率为 $1 - \alpha$, 即该区间包含待估参数真值的可信程度为 $100(1 - \alpha)\%$, 该值越大, 越有理由相信真值所在范围为 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$

第三部分置信区间的计算方法（10 分钟）

例 1：设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 为已知, μ 为未知, 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本, 求 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

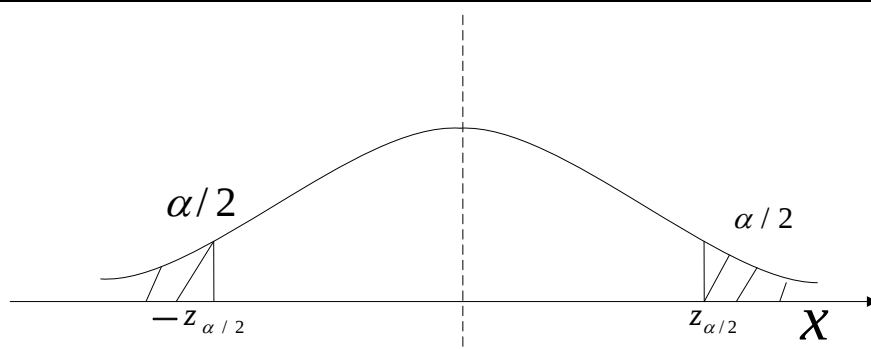
解：置信区间由样本来确定, $\bar{x}$ 是 μ 的无偏估计, 可由样本获得观察值, 且 $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, 所以

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

它不依赖于任何未知参数, 按标准正态分布的上 α 分位点的定义, 有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$

即 $P\{\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$ 。



这样就得到了 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}), \quad \text{常写成 } (\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$$

如：取 $\alpha=0.05$ ，即 $1-\alpha=0.95$ ，又若 $\sigma=1$ ， $n=16$ ，查表得 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$ ，可得置信水平为 0.95 的置信区间 $(\bar{x} \pm 0.49)$

若由一个样本值算得观察值 $\bar{x}=5.20$ ，则得到一个区间 (5.20 ± 0.49) 即 $(4.71, 5.69)$ 该区间仍称为置信水平为 0.95 得置信区间。其含义是该区间包含真值 μ 的可信程度为 95%

第四部分置信区间长度与估计精度 (10 分钟)

与区间的取法和样本容量有关

在相同的置信水平下，置信区间越短，估计精度越高

置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间不是唯一的，如在例 1 中若给定 $\alpha=0.05$ ，则以下概率也成立

$$P\{-z_{0.04} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\} = 0.95,$$

$$\text{即 } P\{\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01}\} = 0.95$$

故置信区间为 $(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01})$ ，也是置信水平为 0.95 的置信区间

现在比较一下两个置信区间的长度，当 $\alpha=0.05$ 时

$$\text{对于例 1 的置信区间长度为 } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} \times 2 = 3.92 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{对于本例，置信区间长度为 } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

显然例 1 的区间长度要短一些，因此我们通常取例 1 的结果作为 μ 的置信区间。

一般的，对于像标准正态分布概率密度函数那样，其图象单峰且对称的情况，当 n 固定时，取形如例 1 那样的按图象对称规律所取的置信区间其长度为最短，估计精度最高。

多数情况下，当样本容量增大时，区间长度减小，精度增高。但往往在实际应用

中得到足够多的大量的样本是不实际的。

第五部分区间估计的一般方法（10 分钟）

寻求未知参数 ϑ 的置信区间的具体做法如下：

1° 寻找样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的一个函数：

$$W=W(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta),$$

包含待估参数 ϑ ，而不含其它未知参数，并且 W 的分布已知且不依赖于任何未知参数(当然不依赖于待估参数 ϑ)；函数 $W(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta)$ 的构造常从 θ 的点估计着手考虑，

比如在例 1 中利用待估参数和相应估计量构造的一个标准正态分布函数

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

2° 对于给定的置信水平 $1-\alpha$ ，定出两个常数 a, b ，使得

$$P\{a < W(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta) < b\} \geq 1 - \alpha,$$

比如例 1 中 $P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$

注意这里尽量选取置信区间使其长度最短，以达到最佳估计精度

3° 若能从不等式 $a < W(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta) < b$ 中得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \vartheta < \bar{\theta}$ ，其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ， $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是统计量，那么 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 就是 ϑ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

例 1 中即 $P\{\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha。$

常用的正态总体参数置信区间可以用上述步骤推得。

课后作业	包括课后作业、数值实验作业、其它要求
课后小结	课后小结是教案执行情况的经验总结，目的在于改进和调整教案，为下一轮课讲授设计更加良好的教学方案。应全面审视教学过程，特别注意对意外发现、点滴收获、以及因个别疏漏而及时补充的方法等方面的内容进行撰写

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____

所在单位_____

授课班级_____

专业_____

撰写时间_____

教案编号	20-0704	教案内容	7.5 正态总体均值和方差的区间估计; 7.6 (0-1) 分布参数的区间估计; 7.7 单侧置信区间	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 会求单个正态总体均值和方差的置信区间。 (2) 会求两个正态总体均值差和方差比的置信区间。 (3) 了解(0-1)分布参数的区间估计, 单侧置信区间的概念。			
	能力要求	1. 培养能力要求: a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中; b) 能够根据试验或观察得到的数据来研究随机现象, 运用参数估计和假设检验等基本的统计方法, 对客观规律性做出合理的估计和判断, 以解决实际问题。			
教学重点	单个正态总体的均值和方差的置信区间, 两个正态总体均值差与方差比的置信区间。				
教学难点	区间估计统计量的构造				
教学方法	提问、讲授、启发、示例、板书、PPT				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分: 旧知识点复习和新课内容概述(5 分钟) 上一节我们学习了区间估计的基本概念和一般求解思路。 寻求未知参数 ϑ 的置信区间的做法如下: 1° 寻找样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个函数: $W=W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \vartheta),$ 包含待估参数 ϑ, 而不含其它未知参数, 并且 W 的分布已知且不依赖于任何未知参数(当然不依赖于待估参数 ϑ); 函数 $W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \vartheta)$的构造常从 θ 的点估计着手考虑, 2° 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b, 使得 $P\{a<W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \vartheta)<b\} \geq 1-\alpha,$ 注意这里尽量选取置信区间使其长度最短, 以达到最佳估计精度。					板书, 回顾

3° 若能从不等式 $a < W(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta) < b$ 中得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \vartheta < \bar{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 就是 ϑ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

在此基础上, 本节学习单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $(0-1)$ 分布参数的区间估计, 单侧置信区间。

PPT

第二部分: 单个正态总体的区间估计 (30 分钟)

(1) 单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

设已给定置信水平 $1-\alpha$, 并设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本. $\bar{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差

1° 均值 μ 的置信区间

(a) σ^2 为已知, 由上节例 1 构造的函数 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 即可得到置信区间 $(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$

(b) σ^2 为未知, 这样不能用上节例 1, 其中含有未知参数 σ 。

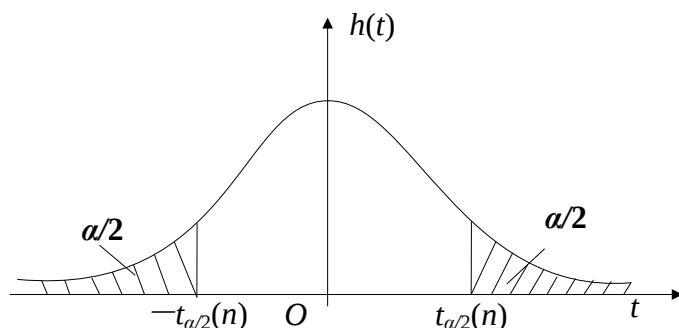
考虑到 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

由第六章定理一, 二, 三可知

$$\text{显然 } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1), \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \text{ 且两者独立,}$$

$$\text{再由 } t \text{ 分布的定义 } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} / \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)} = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

即 σ 用 $S = \sqrt{S^2}$ 来代替



右边的 t 分布不依赖于任何未知参数, 而 t 分布的对称性易得如下区间

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

于是得到 μ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

※总体方差未知的情况居多，所以通常采用 (b) 的置信区间形式

※多个未知参数的情况下，可以先假定其它参数已知，利用点估计构造一个包含待估参数的函数，如果该函数引入了其它未知量，则想办法用相应的估计量，将其消去。

2° 方差 σ^2 的置信区间

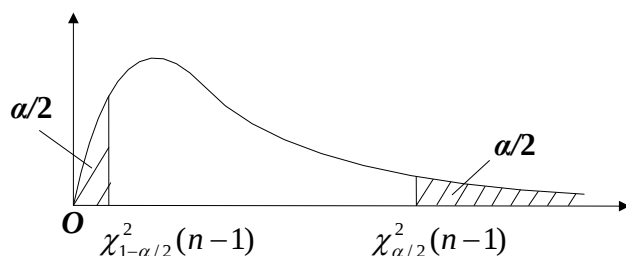
非常简单，由第六章定理二可直接得构造函数 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ，该函数右端分

布不依赖于任何未知参数

确定两个端点

※注意对于 χ^2 分布和 F 分布，为方便起见习惯上仍取对称的分位点

$$\text{即 } P\left\{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$



$$\text{即 } P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right\} = 1 - \alpha$$

就得到一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$$

相应的也可得到标准差 σ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间，只需开方

$$\left(\frac{\sqrt{(n-1)S^2}}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \frac{\sqrt{(n-1)S^2}}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}}\right)$$

第三部分两个正态总体的区间估计（30 分钟）

(二) 两个总体的情况 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

背景：已知产品的某一质量指标服从正态分布，但由于原料、设备、操作人员不同，或工艺过程改变等因素，引起总体均值、总体方差有所改变，需要知道这样的变化有多大，需要考虑**两个正态总体的均值差或方差比的估计问题**。

设已给定置信水平为 $1-\alpha$ ，并设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 是来自第一个总体的样本； $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是来自第二个总体的样本，两个样本相互独立，且设 $\bar{X}, \bar{Y}$ 为相应的总体的样本均值， S_1^2, S_2^2 分别是两个总体的样本方差。

1° 两个总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

(a) σ_1^2, σ_2^2 均为已知情况

$\bar{X}, \bar{Y}$ 分别为 μ_1, μ_2 的无偏估计，所以 $\bar{X} - \bar{Y}$ 是 $\mu_1 - \mu_2$ 的无偏估计量

由 $\bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$, $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$,

有 $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$, 得构造的区间估计函数

$$\text{即 } \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

即得 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

(b) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 为未知的情况

由第六章定理四，不难得到区间估计函数

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

即得 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

※ 如果置信区间的下限大于 0，则认为 μ_1 比 μ_2 大

※ 如果置信区间的上限小于 0，则认为 μ_1 比 μ_2 小

※ 如果置信区间包含 0，则认为 μ_1 与 μ_2 没有显著差别

2° 两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

仅讨论总体均值未知的情况

由第六章定理四，得区间估计函数

$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$, 右边的分布不依赖于任何函数

类似于 χ^2 分布, 我们取一个对称的区间

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$\text{即得 } P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right\} = 1-\alpha$$

就得到一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right)$$

第四部分(0-1)分布参数的区间估计(10 分钟)

(0-1) 分布参数的区间估计

设有一容量 $n>50$ 的大样本, 它来自(0-1)分布的总体 X , 分布律为

$$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}, x=0, 1$$

其中 p 为未知参数, 求 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

解: 已知(0-1)分布的均值 $\mu=p$, 方差 $\sigma^2=p(1-p)$

现在样本容量很大, 由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

样本的和 $\sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从正态分布, 且有

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1), \text{ 于是有}$$

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$$

而不等式 $-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$ 等价于

$$(n+z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\bar{X}^2 < 0$$

设其两个解为 $p_1, p_2, p_1 < p_2$

则 (p_1, p_2) 即为所求置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

第五部分单侧置信区间(15 分钟)

对于某些总体，比如灯泡平均寿命，我们往往只关心其下限，化学药品中杂质含量的上限，这时引出了单侧置信区间的概念

对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$ ，若由来自 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 对于任意的 $\vartheta \in \Theta$ 满足

$$P\{\vartheta > \underline{\theta}\} \geq 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \infty)$ 是 ϑ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的**单侧置信区间**， $\underline{\theta}$ 称为置信水平为 $1 - \alpha$ 的**单侧置信下限**

又若统计量 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 对于任意的 $\vartheta \in \Theta$ 满足

$$P\{\bar{\theta} < \vartheta\} \geq 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(-\infty, \bar{\theta})$ 是 ϑ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的**单侧置信区间**， $\bar{\theta}$ 称为置信水平为 $1 - \alpha$ 的**单侧置信上限**

确定方法同双侧置信区间取法，不同的是确定区间的时后一般只考虑单侧特性。

比如对于正态总体 X ，若均值 μ ，方差 σ^2 均为未知

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为一个样本，侧由 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$\text{有 } P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

$$\text{即 } P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

于是得到 μ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间

$(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \infty)$ ，其它类似。

课后作业

P210, 14, 16, 18, 20, 21

课后小结

课后小结是教案执行情况的经验总结，目的在于改进和调整教案，为下一轮课讲授设计更加良好的教学方案。应全面审视教学过程，特别注意对意外发现、点滴收获、以及因个别疏漏而及时补充的方法等方面的内容进行撰写