

第一节 点估计

一、点估计问题的提法

二、估计量的求法

三、小结

一、点估计问题的提法

设总体 X 的分布函数形式已知,但它的一个或多个参数为未知,借助于总体 X 的一个样本来估计总体未知参数的值的问题称为**点估计问题**.

例1 在某炸药制造厂,一天中发生着火现象的次数 X 是一个随机变量,假设它服从以 $\lambda > 0$ 为参数的泊松分布,参数 λ 为未知,现有以下的样本值,试估计参数 λ .

着火次数 k	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7	
发生 k 次着火的 天数 n_k	75	90	54	22	6	2	1	0	$\Sigma = 250$

解 因为 $X \sim \pi(\lambda)$, 所以 $\lambda = E(X)$.

用样本均值来估计总体的均值 $E(X)$.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{k=0}^6 kn_k}{\sum_{k=0}^6 n_k} = \frac{1}{250} (0 \times 75 + 1 \times 90 + 2 \times 54 + 3 \times 22 + 4 \times 6 + 5 \times 2 + 6 \times 1) = 1.22.$$

故 $E(X) = \lambda$ 的估计为 1.22.

点估计问题的一般提法

设总体 X 的分布函数 $F(x; \theta)$ 的形式为已知, θ 是待估参数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为相应的一个样本值.

点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 来估计未知参数 θ .

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为 θ 的估计量. } 通称估计,
 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 θ 的估计值. } 简记为 $\hat{\theta}$.

二、估计量的求法

由于估计量是样本的函数, 是随机变量, 故对不同的样本值, 得到的参数值往往不同, 如何求估计量是关键问题.

常用构造估计量的方法: (两种)

矩估计法和最大似然估计法.



1. 矩估计法

设 X 为连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, 或 X 为离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X = x\} = p(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 为待估参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本,



假设总体 X 的前 k 阶矩

$$\mu_l = E(X^l) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^l f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) dx \quad (X \text{ 为连续型})$$

$$\text{或 } \mu_l = E(X^l) = \sum_{x \in R_X} x^l p(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (X \text{ 为离散型})$$

$$l = 1, 2, \dots, k$$

存在(其中 R_X 是 x 可能取值的范围)。

矩估计法的定义

用样本矩来估计总体矩, 用样本矩的连续函数来估计总体矩的连续函数, 这种估计法称为**矩估计法**.

矩估计法的具体做法: 令 $\mu_l = A_l, \quad l = 1, 2, \dots, k.$

这是一个包含 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 的方程组, 解出其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

用方程组的解 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ 分别作为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 的估计量, 这个估计量称为矩估计量.

矩估计量的观察值称为矩估计值.

例2 设总体 X 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布, 其中 a , b 未知, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本, 求 a , b 的估计量.

解
$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4},$$

令
$$\frac{a+b}{2} = A_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

即

$$\begin{cases} a+b=2A_1, \\ b-a=\sqrt{12(A_2-A_1^2)}. \end{cases}$$

解方程组得到 a , b 的矩估计量分别为

$$\hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

$$\hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

例3 设总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 都存在, 且有 $\sigma^2 > 0$, 但 μ 和 σ^2 均为未知, 又设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是一个样本, 求 μ 和 σ^2 的矩估计量.

解 $\mu_1 = E(X) = \mu,$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2,$$

解得 $\mu = \mu_1; \quad \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2.$

分别以 A_1, A_2 代替 μ_1, μ_2 , 得 μ 和 σ^2 的矩估计量分别为

$$\hat{\mu} = A_1 = \bar{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$



所得结果表明, 总体均值与方差的矩估计量的表达式不因不同的总体分布而异.

例如, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知, 即得 μ, σ^2 的矩估计量

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

一般地,

用样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 作为总体 X 的均值的矩估计,

用样本二阶中心矩 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 作为总体 X 的方差的矩估计.



2. 最大似然估计法

似然函数的定义

(1) 总体 X 属离散型

若总体 X 属离散型, 设分布律

$P\{X = x\} = p(x; \theta), \theta \in \Theta$ 的形式为已知, θ 为待估参数, Θ 是 θ 可能的取值范围. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 则 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合分布律为 $\prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$.

又设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的一个样本值.

则样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 取到观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的概率,

即 $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$ 发生的概率为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

$L(\theta)$ 称为样本的似然函数.

最大似然估计法

得到样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 时, 选取使似然函数 $L(\theta)$

取得最大值的 $\hat{\theta}$ 作为未知参数 θ 的估计值,

即 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$.

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

这样得到的 $\hat{\theta}$ 与样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 有关, 记为

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 参数 θ 的最大似然估计值,

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 参数 θ 的最大似然估计量.

(2) 总体 X 属连续型

似然函数的定义

设概率密度为 $f(x; \theta)$, θ 为待估参数, $\theta \in \Theta$, Θ 是 θ 可能的取值范围.

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本, 则

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合密度为 $\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$.

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的一个样本值. 则随机点 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 落在点



$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的邻域(边长分别为 $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ 的 n 维立方体)内的概率近似地为 $\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) dx_i$,

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta),$$

$L(\theta)$ 称为样本的似然函数.

若 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$.

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 参数 θ 的最大似然估计值,

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 参数 θ 的最大似然估计量.

求最大似然估计的步骤:

(一) 写出似然函数

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$$

$$\text{或 } L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta);$$

(二) 取对数

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i; \theta) \quad \text{或} \quad \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta);$$



(三) 对 θ 求导 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta}$, 并令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$, **对数似然方程**

解方程即得未知参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

最大似然估计法也适用于分布中含有多个未知参数的情况. 此时只需令

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad \text{对数似然方程组}$$

解出由 k 个方程组成的方程组, 即可得各未知参数 θ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例4 设 $X \sim b(1, p)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的一个样本, 求 p 的最大似然估计量.

解 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的一个样本值, X 的分布律为

$$P\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

故似然函数
$$L(p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$
$$= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i},$$



而
$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1 - p),$$

令
$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1 - p} = 0,$$

解得 p 的最大似然估计值

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

p 的最大似然估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}.$

这一估计量与矩估计量是相同的.



例5 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 为未知参数, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自 X 的一个样本值, 求 μ 和 σ^2 的最大似然估计量.

解 X 的概率密度为

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

似然函数为

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$



$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(\mu, \sigma^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\mu, \sigma^2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n x_i - n\mu \right] = 0, \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0, \end{cases}$$



由前一式解得

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

代入后一式得

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

因此 μ, σ^2 的最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

它们与相应的矩估计量相同.



例6 设总体 X 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布, 其中 a , b 未知, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值, 求 a, b 的最大似然估计量.

解 记 $x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$

$$x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

X 的概率密度为

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



补充例题



似然函数为

$$L(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由于 $a \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq b,$

等价于 $a \leq x_{(1)}, x_{(n)} \leq b,$

似然函数为

$$L(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \leq x_{(1)}, x_{(n)} \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



于是对于满足条件 $a \leq x_{(1)}, b \geq x_{(n)}$ 的任意 a, b 有

$$L(a, b) = \frac{1}{(b - a)^n} \leq \frac{1}{(x_{(n)} - x_{(1)})^n},$$

即似然函数 $L(a, b)$ 在 $a = x_{(1)}, b = x_{(n)}$ 时取到最大值 $(x_{(n)} - x_{(1)})^{-n}$.

a, b 的最大似然估计值为 $\hat{a} = x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i,$

$$\hat{b} = x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i,$$

a, b 的最大似然估计量为

$$\hat{a} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad \hat{b} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

最大似然估计的性质

设 θ 的函数 $u = u(\theta)$, $\theta \in \Theta$ 具有单值反函数 $\theta = \theta(u)$, $u \in U$ 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x; \theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

证明 因为 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计值, 所以

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta),$$

其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值,

由于

$$\hat{u} = u(\hat{\theta}), \quad \hat{\theta} = \theta(\hat{u}),$$

故

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta(\hat{u})) = \max_{u \in U} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta(u)),$$

于是 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

此性质可以推广到总体分布中含有多个未知参数的情况.



在例5中, σ^2 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

函数 $u = u(\sigma^2) = \sqrt{\sigma^2}$ 有单值反函数

$$\sigma^2 = u^2 \quad (u \geq 0),$$

故标准差 σ 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$



三、小结

两种求点估计的方法: $\left\{ \begin{array}{l} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{array} \right.$

在统计问题中往往先使用最大似然估计法,
在最大似然估计法使用不方便时,再用矩估计法.

$$\text{似然函数 } L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$$

$$\text{或 } L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta);$$

第二节 基于截尾样本的最大似然估计

一、基本概念

二、基于截尾样本的最大似然估计

三、小结

一、基本概念

(1) 寿命分布的定义

产品寿命 T 是一个随机变量, 它的分布称为**寿命分布**.

(2) 完全样本的定义

将随机抽取的 n 个产品在时间 $t = 0$ 时, 同时投入试验直到每个产品都失效. 记录每一个产品的失效时间, 这样得到的样本(即由所有产品的失效时间 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ 所组成的样本)叫完全样本.

(一种典型的寿命试验)



如果不能得到完全样本, 就考虑**截尾寿命试验**.

(3) 两种常见的截尾寿命试验

① 定时截尾寿命试验

假设将随机抽取的 n 个产品在时间 $t = 0$ 时同时投入试验, 试验进行到事先规定的截尾时间 t_0 停止, 如试验截止时共有 m 个产品失效, 它们的失效时间分别为 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m \leq t_0$, 此时 m 是一个随机变量, 所得的样本 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 称为定时截尾样本.



② 定数截尾寿命试验

假设将随机抽取的 n 个产品在时间 $t = 0$ 时同时投入试验, 试验进行到有 m 个(m 是事先规定的, $m < n$)产品失效时停止, m 个产品的失效时间分别为 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m$, 这里 t_m 是第 m 个产品的失效时间, 所得的样本 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 称为定数截尾样本.



二、基于截尾样本的最大似然估计

设产品的寿命分布是指数分布, 其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad \theta > 0 \text{ 未知.}$$

(1) 定数截尾样本的最大似然估计

设有 n 个产品投入定数截尾试验, 截尾数为 m , 得定数截尾样本 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m$, 现在要利用



这一样本估计未知参数 θ (即产品的平均寿命).

而有 $n-m$ 个产品在 t_m 时尚未失效,

即有 $n-m$ 个产品的寿命超过 t_m .

利用最大似然估计法来估计 θ ,

为了确定似然函数, 观察上述结果出现的概率.

产品在 $(t_i, t_i + dt_i]$ 失效的概率近似地为

$$f(t_i)dt_i = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t_i}{\theta}} dt_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$



其余 $n - m$ 个产品寿命超过 t_m 的概率为

$$\left(\int_{t_m}^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt \right)^{n-m} = (e^{-t_m/\theta})^{n-m},$$

故上述观察结果出现的概率近似地为

$$\begin{aligned} & \binom{n}{m} \left(\frac{1}{\theta} e^{-t_1/\theta} dt_1 \right) \left(\frac{1}{\theta} e^{-t_2/\theta} dt_2 \right) \cdots \left(\frac{1}{\theta} e^{-t_m/\theta} dt_m \right) (e^{-t_m/\theta})^{n-m} \\ &= \binom{n}{m} \frac{1}{\theta^m} e^{-\frac{1}{\theta}[t_1+t_2+\cdots+t_m+(n-m)t_m]} dt_1 dt_2 \cdots dt_m, \end{aligned}$$

其中 $dt_1, dt_2, \dots, dt_m$ 为常数.



取似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^m} e^{-\frac{1}{\theta}[t_1 + t_2 + \cdots + t_m + (n-m)t_m]}.$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = -m \ln \theta - \frac{1}{\theta}[t_1 + t_2 + \cdots + t_m + (n-m)t_m]$$

令

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) &= -\frac{m}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}[t_1 + t_2 + \cdots + t_m + (n-m)t_m] \\ &= 0 \end{aligned}$$



于是得到 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{s(t_m)}{m}.$$

其中 $s(t_m) = t_1 + t_2 + \cdots + t_m + (n - m)t_m$ 称为总试验时间,它表示直到时刻 t_m 为止 n 个产品的试验时间的总和.



(2) 定时截尾样本的最大似然估计

设定时截尾样本

$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m \leq t_0$, (其中 t_0 是截尾时间)

与上面讨论类似, 可得似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^m} e^{-\frac{1}{\theta}[t_1 + t_2 + \cdots + t_m + (n-m)t_0]},$$

θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{s(t_0)}{m}$,

其中 $s(t_0) = t_1 + t_2 + \cdots + t_m + (n-m)t_0$ 称为总试验时间, 它表示直到时刻 t_0 为止 n 个产品的试验时间的总和.



例 设电池的寿命服从指数分布, 其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad \theta > 0 \text{ 未知.}$$

随机地取50只电池投入寿命试验, 规定试验进行到其中有15只失效时结束试验, 测得失效时间(小时)为115, 119, 131, 138, 142, 147, 148, 155, 158, 159, 163, 166, 167, 170, 172.

试求电池的平均寿命 θ 的最大似然估计值.

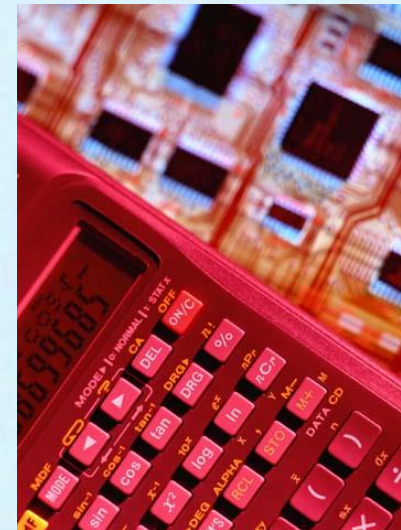


解 $n = 50, \quad m = 15,$

$$\begin{aligned} s(t_{15}) &= 115 + 119 + \cdots + 170 + 172 + (50 - 15) \times 172 \\ &= 8270, \end{aligned}$$

θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{8270}{15} = 551.33 \text{ (小时)}.$$



三、小结

基于截尾样本的最大似然估计

两种常见的截尾寿命试验 { 定时截尾寿命试验
定数截尾寿命试验

定时截尾样本的最大似然估计: $\hat{\theta} = \frac{s(t_0)}{m}$,

定数截尾样本的最大似然估计: $\hat{\theta} = \frac{s(t_m)}{m}$.



第三节 估计量的评选标准

- 一、问题的提出
- 二、无偏性
- 三、有效性
- 四、相合性
- 五、小结

一、问题的提出

对于同一个参数，用不同的估计方法求出的估计量可能不相同.

问题



(1)对于同一个参数究竟采用哪一个估计量好?

(2)评价估计量的标准是什么?

本节介绍几个常用标准.



二、无偏性

若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的一个样本,
 $\theta \in \Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数,
这里 Θ 是 θ 的取值范围.

若估计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在, 且对于任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

无偏估计的实际意义: 无系统误差.



例1 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ ($k \geq 1$) 存在, 又设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本, 试证明不论总体服从什么分布, k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

证 因为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 与 X 同分布,

故有 $E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

即 $E(A_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^k) = \mu_k.$

故 k 阶样本矩 A_k 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

特例:

不论总体 X 服从什么分布, 只要它的数学期望存在, $\bar{X}$ 总是总体 X 的数学期望 $\mu_1 = E(X)$ 的无偏估计量.



例2 设总体 X 服从指数分布, 其概率密度

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中参数 $\theta > 0$, 又设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 试证 $\bar{X}$ 和 $nZ = n[\min(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ 都是 θ 的无偏估计.

证 因为 $E(\bar{X}) = E(X) = \theta$,

所以 $\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

补充例题



具有概率密度

$$f_{\min}(x; \theta) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{nx}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故知 $E(Z) = \frac{\theta}{n}, \quad E(nZ) = \theta,$

所以 nZ 也是 θ 的无偏估计量.

由以上两例可知, 一个参数可以有不同的无偏估计量.



三、有效性

比较参数 θ 的两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$,如果在样本容量 n 相同的情况下, $\hat{\theta}_1$ 的观测值较 $\hat{\theta}_2$ 更密集,则认为 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 为理想.

由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度的度量, 所以无偏估计以方差小者为好.

设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量,

若有 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.



四、相合性

若 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量, 若对于任意 $\theta \in \Theta$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 依概率收敛于 θ , 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量.

例如 由第六章第三节知, 样本 $k(k \geq 1)$ 阶矩是总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ 的相合估计量, 进而若待估参数 $\theta = g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, 其中 g 为连续函数, 则 θ 的矩估计量

$$\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n) = g(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

是 θ 的相合估计量.



五、小结

估计量的评选的三个标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性

相合性是对估计量的一个基本要求, 不具备相合性的估计量是不予以考虑的.

由最大似然估计法得到的估计量, 在一定条件下也具有相合性.

估计量的相合性只有当样本容量相当大时,

才能显示出优越性，这在实际中往往难以做到，

因此，在工程中往往使用无偏性和有效性这两个标准.



第四节 区间估计

一、区间估计的基本概念

二、典型例题

三、小结

一、区间估计的基本概念

1. 置信区间的定义

设总体 X 的分布函数 $F(x; \theta)$ 含有一个未知参数 θ , $\theta \in \Theta$, 对于给定值 α ($0 < \alpha < 1$), 若由样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ($\underline{\theta} < \bar{\theta}$),

对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区



间, $\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信水平.

关于定义的说明

被估计的参数 θ 虽然未知, 但它是一个常数, 没有随机性, 而区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是随机的.

因此定义中下表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

的本质是:

随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 以 $1-\alpha$ 的概率包含着参数 θ 的真值,



而不能说参数 θ 以 $1-\alpha$ 的概率落入随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

另外定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

还可以描述为:

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等,都是 n)

每个样本值确定一个区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$,每个这样的区间或

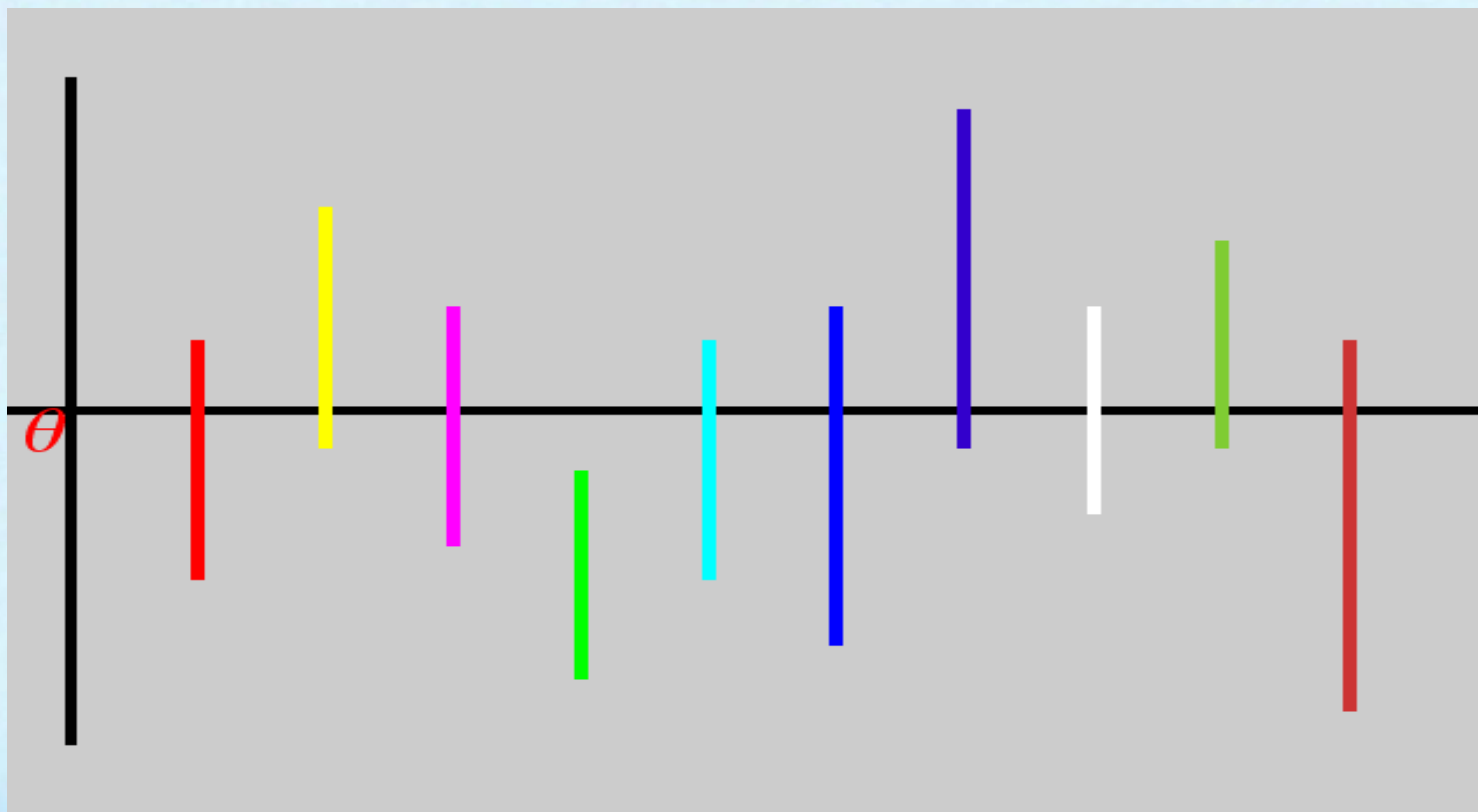
包含 θ 的真值或不包含 θ 的真值,按伯努利大数定理,

在这样多的区间中,包含 θ 真值的约占 $100(1-\alpha)\%$,

不包含的约占 $100\alpha\%$.



例如 若 $\alpha = 0.01$, 反复抽样 1000 次,
则得到的 1000 个区间中不包含 θ 真值的约为 10 个.



2. 求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 和 θ 的函数

$$W = W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta),$$

使 W 的分布不依赖于 θ 以及其他未知参数,

称具这种性质的函数 W 为**枢轴量**.



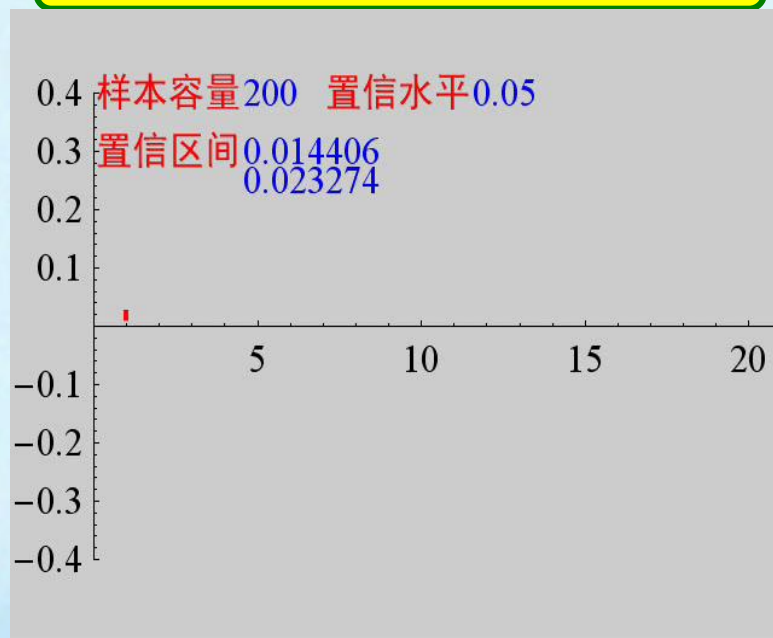
- (2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b 使得 $P\{a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$,
- (3) 从 $a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 就是 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.



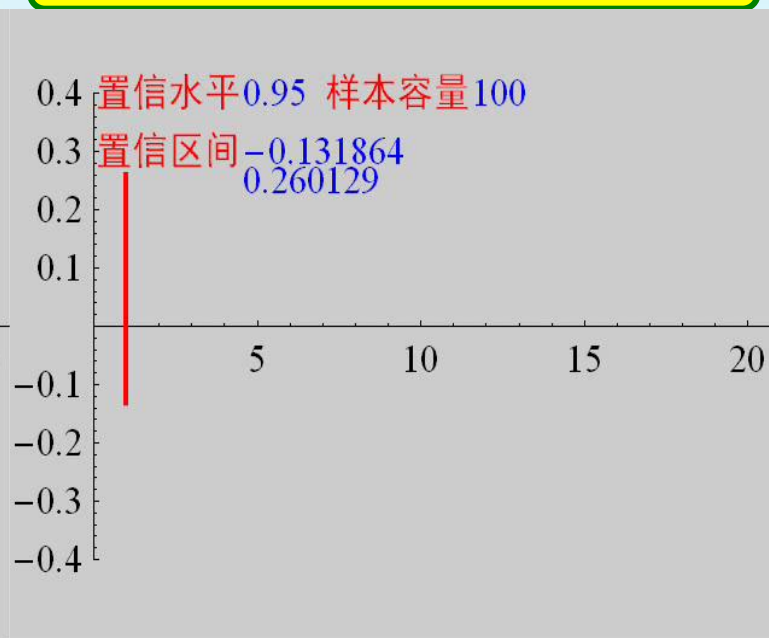
样本容量 n 固定,置信水平 $1-\alpha$ 增大,置信区间长度增大,可信程度增大,区间估计精度降低.

置信水平 $1-\alpha$ 固定,样本容量 n 增大,置信区间长度减小,可信程度不变,区间估计精度提高.

单击图形播放/暂停 ESC键退出



单击图形播放/暂停 ESC键退出



二、典型例题

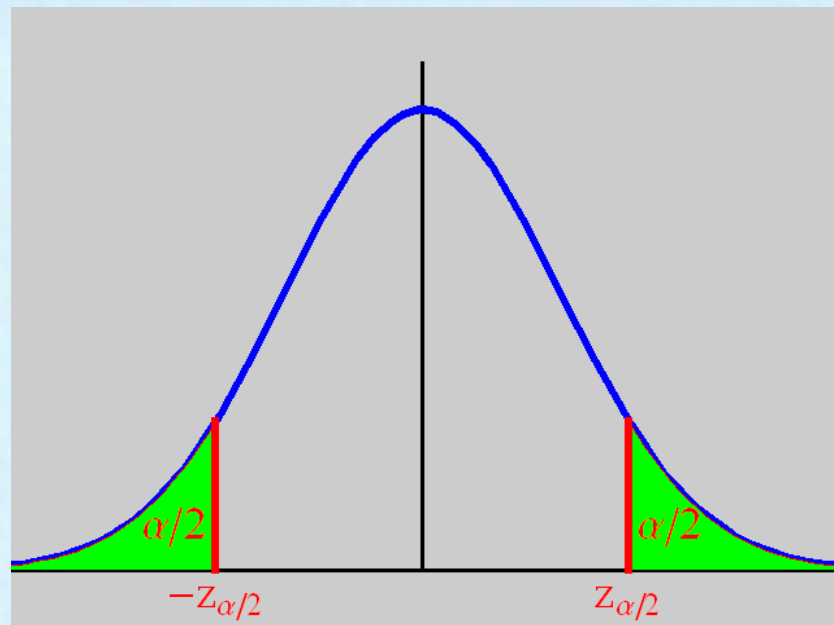
例1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 为已知, μ 为未知, 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本, 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

解 因为 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计, 且 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 所服从的分布 $N(0,1)$ 是不依赖于任何未知

参数的, 按标准正态分布的上 α 分位点的定义, 有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$



即
$$P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$



于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right).$$

这样的置信区间常写成

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right).$$

其置信区间的长度为 $2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$.



注意：置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是不唯一的。

如果在例1中取 $n = 16$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0.05$,

查表可得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$,

得一个置信水平为 0.95 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96 \right)$.

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\bar{x} = 5.20$,

则置信区间为 (5.20 ± 0.49) , 即 $(4.71, 5.69)$.



在例1中如果给定 $\alpha = 0.05$,

$$\text{则又有 } P\left\{-z_{0.04} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95,$$

$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}\right\} = 0.95,$$

故 $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}\right)$ 也是 μ 的置信水平为0.95的置信区间.

其置信区间的长度为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01})$.

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} = 3.92 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$



显然 $L_1 < L_2$. **置信区间短表示估计的精度高.**

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取 a 和 b 关于原点对称时, 能使置信区间长度最小.

补充例题



三、小结

点估计不能反映估计的精度, 故而本节引入了区间估计.

置信区间是一个随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, 它覆盖未知参数具有预先给定的高概率(置信水平), 即对于任意的 $\theta \in \Theta$, 有 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha$.

求置信区间的三个步骤.



第五节 正态总体均值与方差的区间估计

- 一、单个总体的情况
- 二、两个总体的情况
- 三、小结

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

设给定置信水平为 $1-\alpha$ ，并设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本， $\bar{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差。

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2 为已知，由上节例1可知：

μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right).$$



(2) σ^2 为未知,

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$.

推导过程如下:

由于区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$ 中含有未知参数 σ ,

不能直接使用此区间,

但因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 可用 $S = \sqrt{S^2}$ 替换 σ ,



又根据第六章定理三知 $\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

则
$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

即

$$P\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

于是得 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$



例1 有一大批糖果, 现从中随机地取 16 袋, 称得重量(克)如下:

506 508 499 503 504 510 497 512
514 505 493 496 506 502 509 496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信度为0.95的置信区间.

解 $1 - \alpha = 0.95, \quad \alpha/2 = 0.025$

$$n - 1 = 15, \quad t_{0.025}(15) = 2.1315,$$

计算得 $\bar{x} = 503.75, \quad s = 6.2022,$



得 μ 的置信度为95%的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \right) \quad \text{即} \quad (500.4, 507.1).$$

就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4克与507.1克之间, 这个估计的可信程度为95%.

若依此区间内任一值作为 μ 的近似值,
其误差不大于 $\frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61$ (克).

这个误差的可信度为95%.

例2 (续例) 求补充1中总体标准差 σ 的置信度为0.95的置信区间.

解 $\frac{\alpha}{2} = 0.025, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975, \quad n - 1 = 15,$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表可知:

附表2-1

附表2-2

$$\chi_{0.025}^2(15) = 27.488, \quad \chi_{0.975}^2(15) = 6.262,$$

计算得 $s = 6.2022,$

代入公式得标准差的置信区间 (4.58, 9.60).



2. 方差 σ^2 的置信区间

根据实际需要, 只介绍 μ 未知的情况.

方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right).$$

推导过程如下:

因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

根据第六章第二节定理二知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,



则

$$P\left\{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

即

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right\} = 1 - \alpha,$$

于是得方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right).$$

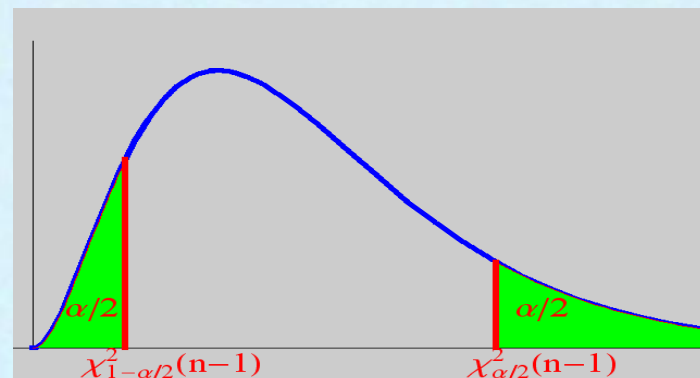


进一步可得:

标准差 σ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} \right).$$

注意: 在密度函数不对称时,
如 χ^2 分布和 F 分布,



习惯上仍取对称的分位点来确定置信区间(如图).



二、两个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的情况

设给定置信水平为 $1-\alpha$ ，并设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 为第一个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本， $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 为第二个总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本， $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别是第一、二个总体的样本均值， S_1^2, S_2^2 分别是第一、二个总体的样本方差。

1. 两个总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

(1) σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知



$\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right).$$

推导过程如下:

因为 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 分别是 μ_1, μ_2 的无偏估计, 所以
 $\bar{X} - \bar{Y}$ 是 $\mu_1 - \mu_2$ 的无偏估计,
由 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 的独立性及

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$



可知 $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$

或 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1),$

于是得 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right).$$





(2) σ_1^2 和 σ_2^2 均为未知,

只要 n_1 和 n_2 都很大(实际上 > 50 即可),则有

$\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 $1 - \alpha$ 的近似置信区间

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right).$$

(3) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 为未知,

$\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间



$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right).$$

其中

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$



例3 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度, 随机地取I型子弹10发, 得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(\text{m/s})$, 标准差 $s_1 = 1.10(\text{m/s})$, 随机地取II型子弹20发, 得枪口速度平均值为 $\bar{x}_2 = 496(\text{m/s})$, 标准差 $s_2 = 1.20(\text{m/s})$, 假设两总体都可认为近似地服从正态分布, 且由生产过程可认为它们的方差相等, 求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间.

解 由题意, 两总体样本是相互独立的.



又因为假设两总体的方差相等, 但数值未知,
由于 $1 - \alpha = 0.95$, $\alpha/2 = 0.025$, $n_1 = 10$, $n_2 = 20$,

$$n_1 + n_2 - 2 = 28, \quad t_{0.025}(28) = 2.048.$$

$$s_w^2 = (9 \times 1.10^2 + 19 \times 1.20^2) / 28,$$

$$s_w = \sqrt{s_w^2} = 1.1688,$$

故所求的两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 0.95 的置信区间

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm s_w \times t_{0.025}(28) \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}} \right) = (4 \pm 0.93),$$

即 $(3.07, 4.93)$.



例4 为提高某一化学生产过程的得率, 试图采用一种新的催化剂, 为慎重起见, 在试验工厂先进行**试验**. 设采用原来的催化剂进行了 $n_1 = 8$ 次试验, 得到得率的平均值 $\bar{x}_1 = 91.73$. 样本方差 $s_1^2 = 3.89$, 又采用新的催化剂进行 $n_2 = 8$ 次试验, 得到得率的平均值 $\bar{x}_2 = 93.75$, 样本方差 $s_2^2 = 4.02$, 假设两总体都可认为近似地服从正态分布, 且方差相等, 求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为0.95 的置信区间.



解 因为

$$s_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 3.96,$$

于是得 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm s_w \times t_{0.025}(14) \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} \right) = (-2.02 \pm 2.13),$$

即 所求置信区间为 $(-4.15, 0.11)$.



2. 两个总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.

由第六章第三节定理四

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1),$$

并且分布 $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 不依赖任何未知参数.

取 $\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2}$ 为枢轴量得



$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} \\ = 1-\alpha,$$

即

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right\} \\ = 1-\alpha,$$

于是得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right).$$



例5 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径, 随机抽取机器 A 生产的管子 18 只, 测得样本方差为 $s_1^2 = 0.34(\text{mm}^2)$; 抽取机器 B 生产的管子 13 只, 测得样本方差 $s_2^2 = 0.29(\text{mm}^2)$. 设两样本相互独立, 且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\mu_i, \sigma_i^2 (i = 1, 2)$ 均未知, 求方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为 0.90 的置信区间.



解

$$n_1 = 18, \quad s_1^2 = 0.34(\text{mm}^2),$$

$$n_2 = 13, \quad s_2^2 = 0.29(\text{mm}^2), \quad \alpha = 0.10,$$

$$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.05}(17, 12) = 2.59,$$

$$F_{1-\alpha/2}(17, 12) = F_{0.95}(17, 12) = \frac{1}{F_{0.05}(12, 17)} = \frac{1}{2.38},$$

于是得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{0.34}{0.29} \times \frac{1}{2.59}, \frac{0.34}{0.29} \times 2.38 \right) = (0.45, 2.79).$$

补充例题



三、小结

(1) 单个总体均值 μ 的置信区间

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 \text{ 为已知, } \left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right). \\ \sigma^2 \text{ 为未知, } \left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right). \end{array} \right.$$

(2) 单个总体方差 σ^2 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right).$$



(3) 两个总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知, $\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right).$

σ_1^2 和 σ_2^2 均为未知, $\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right).$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 为未知,

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right).$$



(4) 两个总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

总体均值 μ_1, μ_2 为未知

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right).$$



第六节 $(0-1)$ 分布参数的区间估计

一、置信区间公式

二、典型例题

一、置信区间公式

设有一容量 $n > 50$ 的大样本, 它来自(0-1)分布的总体 X , X 的分布律为 $f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$, 其中 p 为未知参数, 现在来求 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

$$\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right),$$

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$, $b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)$, $c = n\bar{X}^2$.

推导过程

因为(0-1)分布的均值和方差分别为

$$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p),$$

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是一个样本, 因为容量 n 较大,

由**中心极限定理**知

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

近似地服从 $N(0,1)$ 分布, 于是有

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha,$$



而不等式 $-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$

等价于 $(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\bar{X}^2 < 0$,

记 $p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$, $b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)$, $c = n\bar{X}^2$.

于是 p 的近似置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间是
 (p_1, p_2) .



二、典型例题

例1 设从一大批产品的100个样品中, 得一级品60个, 求这批产品的一级品率 p 的置信水平为0.95的置信区间.

解 一级品率 p 是(0-1)分布的参数,

$$n = 100, \quad \bar{x} = \frac{60}{100} = 0.6,$$

$$1 - \alpha = 0.95, \quad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

则
$$a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84,$$



$$b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -123.84,$$

$$c = n\bar{X}^2 = n\bar{x}^2 = 36,$$

于是

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.50,$$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.69,$$



故 p 的置信水平为0.95的置信区间为 (0.50, 0.69).

补充例题



第七节 单侧置信区间

一、问题的引入

二、基本概念

三、小结

一、问题的引入

在以上各节的讨论中, 对于未知参数 θ , 我们给出两个统计量 $\underline{\theta}, \bar{\theta}$, 得到 θ 的双侧置信区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$. 但在某些实际问题中, 例如, 对于设备、元件的寿命来说, 平均寿命长是我们希望的, 我们关心的是平均寿命 θ 的“下限”; 与之相反, 在考虑化学药品中杂质含量的均值 μ 时, 我们常关心参数 μ 的“上限”. 这就引出了单侧置信区间的概念.



二、基本概念



1. 单侧置信区间的定义

对于给定值 α ($0 < \alpha < 1$), 若由样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta > \underline{\theta}\} \geq 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间, $\underline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限.



又如果统计量 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(-\infty, \bar{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间, $\bar{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信上限.



2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

例如对于正态总体 X , 若均值 μ , 方差 σ^2 均为未知, 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是一个样本, 由

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

有
$$P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

即
$$P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$



于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), +\infty \right),$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1).$$

又由

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

有

$$P\left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \right\} = 1-\alpha,$$



即
$$P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right\} = 1 - \alpha,$$

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}.$$



例 设从一批灯泡中, 随机地取5只作寿命试验, 测得寿命(以小时计)为 1050, 1100, 1120, 1250, 1280, 设灯泡寿命服从正态分布, 求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解 $1 - \alpha = 0.95, \quad n = 5, \quad \bar{x} = 1160,$

$$t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(4) = 2.1318, \quad s^2 = 9950,$$

μ 的置信水平为0.95 的置信下限

$$\underline{\mu} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) = 1065.$$



补充例题



三、小结

正态总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(-\infty, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) \right), \quad \left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \infty \right),$$

单侧置信上限 $\bar{\mu}$

单侧置信下限 $\underline{\mu}$

正态总体方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)} \right).$$

单侧置信上限 $\overline{\sigma^2}$

