

《线性代数》模拟试卷（十五）

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、判断题（正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

- () 1. 若两个矩阵 $AB = O$ ，则 $A = O$ 或 $B = O$.
- () 2. 初等矩阵都是可逆的.
- () 3. 若行列式某两列元素对应成比例，则行列式为零.
- () 4. 任何一个向量组的秩一定不超过其中向量的维数.
- () 5. 任意 n 阶矩阵一定能相似对角化.

二、填空题（每小空3分，共15分）

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB - BA =$ _____.

2. 向量 $\alpha = (2, -1, 1)^T$ 在 $\mathbf{R}^3$ 的一个基 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$ 下的坐标为_____.

3. 若 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ _____.

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 秩为_____.

5. 向量 $\alpha = (1, 2, 3)^T$ 的长度为_____.

三、单项选择题（每小题3分，共24分）

1. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 中代数余子式 $A_{12} = -1$, 则 $A_{23} =$ ().

A. -2 B. 1 C. -1 D. 2

2. 设 A 为 n 阶方阵, $B = -A$, 则必有 ().

- A. $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$ B. $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$ C. $|\mathbf{B}| = (-1)^{2n} |\mathbf{A}|$ D. $|\mathbf{B}| = (-1)^n |\mathbf{A}|$

3. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则 k 必须满足 ().

- A. $k=1$ 或 $k=-1$ B. $k \neq 1$ 且 $k \neq -1$ C. $k=1$ D. $k=-1$

4. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ().

- A. $\mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{P}_2 = \mathbf{B}$ B. $\mathbf{A} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 = \mathbf{B}$ C. $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{B}$ D. $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{A} = \mathbf{B}$

5. 四元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系是 ().

- A. $(0, 0, 0, 0)^T$ B. $(0, 0, 2, 0)^T$ C. $(1, 0, -1, 0)^T$ D. $(0, 0, 2, 0)^T$ 和 $(0, 0, 0, 1)^T$

6. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 6, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 2, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a, -2)^T$ 线性相关, 则 a 应满足条件 ().

- A. $a=2$ B. $a \neq 2$ C. $a=-2$ D. $a \neq -2$

7. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 $\mathbf{B}$ 有特征值 1, 2, 3,

则 $x = ()$.

- A. 4 B. -3 C. -4 D. 3

8. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $|\mathbf{A}| = 0$ 的充分必要条件为 ().

- A. $r(\mathbf{A}) = n$ B. $\mathbf{A}$ 的列向量组线性无关
C. $\mathbf{A}$ 的某两行对应元素成比例 D. $\mathbf{A}$ 的某个列向量可由其余列向量线性表示

四、计算题 (共 6 小题, 共 51 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, 求 $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{44}$ 的值. (7 分)

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 是否可逆若可逆求其逆矩阵. (7 分)

4. 设四元非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, 已知它的三个解向量为 η_1, η_2, η_3 , 其中 $\eta_1 = (3, -4, 1, 2)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (4, 6, 8, 0)^T$, 求 $A\mathbf{x} = \beta$ 的通解. (10 分)

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

6. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基分别为 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 和 $\beta_1 = (1, 3, 5)^T$, $\beta_2 = (6, 3, 2)^T$, $\beta_3 = (3, 1, 0)^T$, 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵. (10 分)