

《线性代数》

课程绪论、课程要求、课程资源

一、课程绪论

数学的重要主题是方程与函数，其中最简单的是一次方程和一次函数。“线性”就是“一次”，“代数”就是加减乘除。顾名思义，线性代数的主要任务就是一次方程与一次函数，因此是最简单的数学。其中一元一次方程和一次函数在中学已经学过了。大学线性代数研究的是多元的一次方程组和一次函数组（即线性映射），是最简单的大学数学课程。中学平面解析几何用代数运算研究几何问题。线性代数则是 n 维空间的解析几何，用矩阵运算研究 n 维向量的相关问题。线性代数的运算看起来繁琐，其实可以归结为两种最简单的运算：矩阵的初等变换和矩阵乘法。繁琐的运算只不过是简单运算的反复应用。而且，繁琐运算都可以交给计算机去完成，人的任务只是将纷纭世界千差万别的复杂问题转化为成可以用这两种运算解决的形式，借助计算机算出结果，再回到现实世界中。

二、课程框架

线性代数，打开高维空间的钥匙！

由矩阵看待大千世界，从方程体会百味人生！

线性代数，与数字做朋友，沟通数学与你之间的千丝万缕。

变换千变万化，向量空间充满奥妙。

线性代数是高等院校各专业学生的一门必修的数学基础课。在很多的应用领域，处理问题的方法是将实际问题离散化，进而将问题转换成为能用计算机处理的数值问题，线性代数提供解决数值问题计算的理论基础。

本课程内容涵盖矩阵理论，线性方程组的求解及解的结构，矩阵的特征值和特征向量等都是现代科学和技术的重要基础，而行列式是其中不可缺少的研究工具。

所以本课程从第一章到第四章是以解线性方程组为主线，以矩阵为主要工具，第四章到第五章是相似矩阵及二次型，线性空间与线性变换。

本课程的主要内容线性方程组，矩阵，行列式， n 维向量，特征值与特征向量。本课程的主线是解线性方程组，主要工具是矩阵。

三、课程发展史

起源：线性方程组的求解

工具：矩阵，行列式，向量

方法：初等变换

应用：自然科学，工程技术，经济

发展：线性空间（变换）

后续：矩阵论，群论

值得一提的是用线性变换求线性方程组解的方法在我国古代的数学著作《九章算术》中就有记载，该书是从先秦开始，经众多学者编纂、修改，约于西汉中叶成书，该书第八章为“方程”（方程术即线性方程组的消元解法）。

历史上对线性代数发展做出突出贡献的数学家有

1.法国数学家笛卡尔（建立了平面直角坐标系，建立了代数和几何的桥梁）生于明朝末期，死于顺治时期；

2.约翰·伯努利（瑞士）将解析几何从二维平面推广到三维空间，解析几何为线性代数提供直观模型；

3.伯努利家族有多位数学家，除了约翰之外，还有约翰 2，约翰 3，Jacob1, Jacob2, 等 11 位数学家；

4.日本数学家关孝和是行列式的发明人之一；另外一个发明人是德国数学家莱布尼茨；

5.英国数学家麦克劳林和瑞士数学家克拉默给出了一些用行列式求解特殊的线性方程组的方法；

6.瑞士数学家欧拉、法国数学家贝祖，拉格朗日，拉普拉斯，傅里叶，德国数学家高斯，法国柯西，德雅克比，英凯莱，英史密斯，法若尔当，德施瓦茨，意大利皮亚诺，德施密特等线性代数的特点：内容丰富，历史悠久，比较抽象，非常有用。

四、课程要求

纪律：

1.第三节课要求十点到教室，并请班长点名记录；

2.手机请调为静音并收起来，不允许放在桌面上；

3.座位请从前往后坐，违反者将把你固定在第一排三次课，或者主动给老师擦三次

黑板;

4.上课必备材料: 课本、练习本、笔记本(按章节归纳整理重点知识和例题)

平时成绩构成:

1.出勤(100分),扣分制,迟到扣2分,旷课扣15分,请假扣2分,违反课堂纪律扣10分;

2.作业分两部分:(1)书面作业(80分),交加1分,分三个等级 A,B,C,分别加2分,1分,0分;不交扣5分;(2)笔记记录情况(分等级按分数计入)。以上两项的平均分即是作业部分的成绩;

3.课堂回答问题(70分),主动回答一次3分;

4.期中测验+章节测验(按小组讲解),各占50%,以实际的平均分计入;

5.网络资源学习小简报以及体会交流(以实际打分计入)

五、课程资源

中国大学 MOOC 中的网络资源:

同济大学、北京理工大学、东南大学、电子科技大学、北京航空航天大学(线性代数启蒙)、华中农业大学、数学文化十讲。

第一章 行列式

第一节 二阶、三阶行列式

教学主要内容	1. 二阶、三阶行列式的定义； 2. 二阶、三阶行列式的应用。	
教学目标	【知识目标】：①理解并掌握二阶、三阶行列式的定义, 并会熟练的计算二阶、三阶行列式；②熟练的应用二阶、三阶行列式。 【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】：通过运用分析归纳的方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度。	
教材分析	重点	二阶、三阶行列式的定义，以及应用。
	难点	三阶行列式的定义及应用。
教学方法与手段	多媒体辅助教学和探究式教学法。	
学习方法	学生首先通过自学，了解二阶、三阶行列式的定义及应用，并叫同学进行讲解，最后教师对这些内容再进行归纳、总结。 同时，启发同学们观察、分析二阶、三阶行列式的下标元素特点，从而为下节课的学习，做个好的铺垫。	
教学学时数	1 学时，45 分钟。	

(一) 实例引入

“鸡兔同笼”问题：明代数学家程大位的《算法统宗》里有一道著名算题用消元法

给出二元一次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 解的表现形式

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

比较 $x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_1 = \frac{D_1}{D}$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

的两种表现形式，发现第二种形式的优美之处，从而进一步探讨第二种形式中字母的来源这种简洁的表现形式对三元一次线性方程组成立吗、对 n 元一次线性方程组成立吗？

(二) 科普小知识

克莱默(Cramer, Gabriel, 1704.7.31-1752.1.4)[瑞士数学家](#)。他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重。

(三) 学生自学二阶行列式的定义及其简单应用

1. 学生自学 5 分钟；

2. 请同学讲解二阶行列式的定义，二阶行列式的特点；

3. 数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为由该表所确定的二阶行列式，即

对角线法则，其中， a_{ij} 称为元素， i 为行标，表明元素位于第 i 行， j 为列标，表明元素位于第 j 列；

(四) 学生自学三阶行列式的定义及其简单应用

1. 学生自学 2 分钟；

2. 请 4 位同学到黑板上计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的结果；

- 3.请同学到黑板上讲解 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示的代数和;
- 4.请同学自学例 4, 例 5;
- 5.请同学回答自学后存在的困惑;
- 6.老师对这些问题进行解答, 并再次强调三阶行列式的特点, 三阶行列式计算规则: 对角线法, 沙路法。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- 7.让同学们分组练习。

(五) 课堂小结

首先请同学们说说这节课的收获, 然后老师在总结二阶、三阶行列式的概念。

第一章 行列式

第二节 全排列与对换

教学主要内容	1. 逆序数，奇排列，偶排列的定义； 2. 对换，奇偶排列的性质。	
教学目标	【知识目标】：①理解并掌握逆序数，奇排列，偶排列的定义，并会熟练的计算排列的逆序数；②掌握直线与平面的夹角公式和交点的计算，并学会灵活应用。 【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】：通过运用分析归纳的方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，让学生体会数学问题从抽象到具体的转化过程，体会数学之美，从而激发学生学习数学的兴趣和信心。	
教材分析	重点	逆序数，奇排列，偶排列，对换的定义。
	难点	对换，奇偶排列的性质。
教学方法与手段	多媒体辅助教学和探究式教学法。	
学习方法	学生可利用高中阶段所熟悉的排列，开始学习逆序数，奇排列，偶排列，对换的定义，并通过具体的数列的对换理解对换，奇偶排列的性质，并对这些知识不断观察、分析、探索、归纳总结，推广到一般情况。	
教学学时数	1 学时，45 分钟。	

教 学 过 程	(一)复习引入 1. 想一想：用 1, 2, 3 这三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？ 123, 132, 213, 231, 312, 321 把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？ $n!$ 2. 思考：这六个三位数具有什么样的特点？ $n!$ 个排列具有什么特点？ (二)讲授新知 由 n 个不同数码 1, 2, 3, $\dots$, n 组成的有序数组 $i_1, i_2, \dots, i_n$，称为一个 n 级全排列。 定义 1 在一个 n 级排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面 ($i_s < i_t$)，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序。 观察一：排列 32514 中那些数字之间构成了逆序？ 定义 2 一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \dots i_n)$。 观察二：排列 217986354 的逆序数？ 奇排列：逆序数是奇数的排列称为奇排列。 偶排列：逆序数是偶数的排列称为偶排列。 问题一：排列 217986354 是什么排列？ 排列 127986354 是什么排列？ 排列 215986374 是什么排列？ 这些排列之间有什么关系？ 结论：这两个排列是调换了 1 和 2 的位置，并且一个是奇排列，一个是偶排列。 对换：在一个排列 $i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调，其他数码不变，得到另一个排列，这样的变换称为一个对换，记为对换 $N(i_s, i_t)$。 猜想：奇（偶）排列经过一个对换得到的新排列是偶（奇）排列。 分析：排列 217986354 与排列 127986354 的奇偶性发生改变，应如何解释？ 排列 217986354 与排列 215986374 的奇偶性发生改变，应如何解释？ 定理 1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变。 (三)课堂小结 会计算一个排列的逆序数，会判断奇排列，偶排列。 思考题：二阶行列式，三阶行列式乘积中元素的特点，以及与全排列，逆序数的关系？
------------------	--

第一章 行列式

第三节 n 阶行列式的定义

教学主要内容	1. 掌握 n 阶行列式的定义； 2. 会用 n 阶行列式的定义，计算简单的行列式。	
教学目标	【知识目标】：①理解并掌握 n 阶行列式的定义；②会用 n 阶行列式的定义，计算简单的行列式。 【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】：通过运用类比、归纳、总结的方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，让学生体会数学问题从抽象到具体的转化过程，体会数学之美，从而激发学生学习数学的兴趣和信心。	
教材分析	重点	n 阶行列式的定义。
	难点	n 阶行列式的定义。
教学方法与手段	多媒体辅助教学和探究式教学法。	
学习方法	学生发现，归纳，二阶，三阶行列式的特点，猜想出 n 阶行列式所表示的代数和中的一般项。	
教学学时数	1 学时，45 分钟。	

(一)复习引入

1. 观察与思考: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

在二阶行列式和三阶行列式中,

- (1) 它们的项数与阶数有什么关系?
- (2) 各项的一般形式怎样?
- (3) 各项的符号与下标有怎样的关系?

(二)讲授新知

定义 1 (n 阶行列式) 用 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 称为 } n \text{ 行列式, 它表示代数和 } \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中和式中的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 要取遍所有 n 级排列。行列式简记为 $|a_{ij}|$, 或 $\det(a_{ij})$ 。

n 阶行列式的代数和中共有 $n!$ 项, 每一项都是取自不同的行、不同的列的 n 个元素乘积,

且冠以正号的项和冠以负号的项各占一半。

例 1 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中, 下列各元素连乘积前面应冠以什么符号?

$$(1) a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66} \quad (2) a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34} \quad (3) a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$$

通过该例题发现 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \text{ 或 } (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

例 2 选择 k, l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中前面冠以负号的项。

例 3 用行列式的定义计算下列行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_{ij} \neq 0.$$

介绍几种三角形行列式：下三角形行列式、上三角形行列式、对角形行列式。

例 5 求多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ x & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3x \end{vmatrix}$ 中 x^3 和 x^4 的系数。

(三) 课堂小结

理解并掌握 n 阶行列式，会用定义做一些简单的计算。

思考题：当行列式的阶数较大，并且零元素较少时，该如何计算行列式？

第一章行列式

第四节 行列式的性质

教学主要内容	1. 掌握行列式的性质； 2. 会用行列式的性质计算简单的行列式； 3. 会运用行列式的性质正确对行列式进行变形，化为上三角行列式，最终正确计算行列式。	
教学目标	【知识目标】 ：①掌握行列式的性质；②会用行列式的性质计算行列式。 【能力目标】 ：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】 ：通过探索、归纳、总结的过程，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，探索事物本质属性的欲望。	
教材分析	重点	行列式的性质。
	难点	行列式性质的使用。
教学方法与手段	多媒体辅助教学和探究式教学法。	
学习方法	学生可利用教师精心准备的例题，通过教师的引导，不断观察、分析、探索、归纳总结得出结论。	
教 学 学时数	2 学时，90 分钟。	

(一)复习引入

1. 想一想：用 n^2 个元素 $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 称为 } n \text{ 行列式, 它表示代数 } \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中和式中的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 要取遍所有 n 级排列。

计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

n 阶行列式共有 $n!$ 项, 因此用定义计算 n 阶行列式是较为困难的, 只有三角形等特殊行列式用定义计算比较方便.

2. 思考：我们已经知道三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积, 因此我们想到能否把一般的行列式化成三角形行列式来计算, 这就需要研究行列式的性质,

(二)讲授新知

探究一

计算二阶, 三阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

发现 1 $D_1 = D_2$ $D_3 = D_4$ D_1, D_2 的行列互换

行列式的转置

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式, 称为 D 的转置行列式, 记为 D^T 或 D , 即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 将行列式转置, 行列式的值不变, 即 $D^T = D$

探究二

计算并说出它们的关系 D_1, D_5, D_3, D_7

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad D_7 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = -D_5 \quad D_3 = -D_7$$

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式的值变号

$$D_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad D_9 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_8 = D_9 = 0$$

它们有两行对应元素相同

推论 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同, 则此行列式的值为零

探究三

$$\text{计算} \quad D_{10} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad D_{11} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{发现} \quad D_{10} = D_{11}$$

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘同一数 k , 等于用数 k 乘此行列。

计算

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

推论 1 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子, 则公因子可以提到行列式外面。

推论 2 如果行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式的值等于零。

例 1 计算行列式

$$(1) D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix} \quad (2) D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

对于第二个行列式我们发现用刚才发现的 3 个性质和两个推论，还是不能将运算简化，那我们还需要继续挖掘行列式的性质。

计算 D_{12}, D_{13}, D_{14} 值，并研究它们的关系

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1+1 & 4+0 & 2+4 \end{vmatrix} \quad D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

发现 $D_{11} = D_{12} + D_{13}$

性质 4 如果将行列式中的某一行（列）的每一个元素都写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行（列）对应位置的元素，其他位置的元素与原行列式相同

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 如果将行列式某一行（列）的每个元素都写成 m 个数 ($m > 2$) 的和，则此行列式可以写成 m 个行列式的和。

思考题：

$$\text{行列式 } D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{该如何计算？}$$

给行列式 D_1 的第一行乘 -1 加到第二行，得到行列式 D_2

$$D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad D_{15} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

研究它们的关系

发现 $D_{14} = D_{15}$

请同学对以上结论应用行列式的性质进行解释

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \text{ 以数 } k \text{ 乘 } D \text{ 的第 3 行后加到第 2 行, 得}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} & a_{24} + ka_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

由性质 4 及性质 3 的推论 2 可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & ka_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

行列式性质的综合应用

$$(1) \text{ 设 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1, \text{ 求 } \begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

请同学们练习第 37 页的 15 题, 并相互交流结果。

性质 5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上, 行列式的值不变。

思考: 如何综合行列式的性质, 计算行列式? 特殊的行列式中什么类型的行列式最容易计算? (上三角形行列式) 如何将一行列式化为上三角行行列式?

下面以一例题介绍方法。

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

交换第一行和第二行得到

$$D = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

给第二行乘以-3 加到第三行

$$D = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

给第三行乘以 $\frac{5}{3}$ 加到第四行

$$D = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

发现这时的行列式是上三角形行列式，它的值等于主对角线元素的乘积。

思考：对于一般的行列式也可以利用行列式的性质，转化为上三角形行列式吗？
计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

请同学们积极思考，并发表自己的看法。

归纳、总结：

计算行列式时常使用行列式的性质，把它化为三角形行列式来计算。

第一步：设第一行第一列的元素不为 0，如果第一行第一列元素为 0，现将第一行与其他行交换，使第一列第一行元素不为 0；

第二步：把第一行分别乘以适当的数加到其他各行，使第一列除第一行元素外其他行元素全为 0；

第三步：再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式；依次做下去，直至使它成为上三角行列式。这时主对角线上元素的乘积就是行列式的值。

性质综合练习：

$$\text{设行列式 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ 则行列式 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11} - 2a_{12} & 4a_{13} - a_{11} \\ -3a_{21} & -9a_{21} + 6a_{22} & -12a_{23} + 3a_{21} \\ a_{31} & 3a_{31} - 2a_{32} & 4a_{33} - a_{31} \end{vmatrix}$$

练习：计算下面的行列式

$$(1) D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 40 \quad (2) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -153$$

$$(3) D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160 \quad (4) D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48$$

$$(5) \text{ 计算 } n \text{ 阶行列式 } D = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}$$

$$(6) \text{ 计算 } D = \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4a_1a_2a_3$$

$$(7) D = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$(8) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = 1 + a_1a_2a_3 \cdots a_n$$

$$(9) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_n (1 + \sum \frac{1}{a_i})$$

$$(10) D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$$

(三) 课堂小结

掌握行列式的性质，并灵活的使用性质计算行列式的值。

(四) 思考题

使用行列式的性质，不能把行列式的阶数降低，能否有较好的方法，把高阶的行列式降为较低阶的行列式？

第一章行列式

第五节 行列式按行（列）展开

教学主要内容	1. 余子式，代数余子式； 2. 行列式的按行（列）展开定理。	
教 学 目 标	【知识目标】：①理解并掌握余子式，代数余子式；②掌握行列式的按行（列）展开定理，并学会灵活应用。 【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】：通过教师精心的引导，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，让学生体会数学问题从抽象到具体的转化过程，体会数学之美，从而激发学生学习数学的兴趣和信心。	
教材分析	重点	掌握行列式的余子式、代数余子式的概念，熟悉行列式的按行（列）展开，会使用代数余子式展开法求解行列式。
	难点	余子式和代数余子式的概念理解正确求解代数余子式，行列式按行展开法则的灵活运用。
教学方法与手段	多媒体辅助教学和探究式教学法	
学习方法	学生可利用教师准备的例题，通过教师的引导，分析，不断观察、分析、探索、归纳总结，推广到一般情况。	
教 学 学时数	2 学时，90 分钟。	

(一)复习引入

1. **想一想：**上节课学习了行列式的性质，用这些可以计算行列式，那对于行列式的计算还有其他途径吗？

首先看这样的一个三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
 - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

通过该行列式的计算，我们发现了什么？请同学们前后 4 个商量，并派代表给我们分享讨论结果。

发现一：三阶行列式降阶成了一些二阶行列式，把复杂的问题转化成了较简单的问题。

发现二：这些二阶行列式前面乘的数字都是来自于同一行，这些二阶行列式都是去掉该元素所在的行和列后，剩下的元素所构成的行列式。

发现三：这些二阶行列式前面有正负号，与前面乘的元素的行和列有关系。

结论：三阶行列式可以用二阶行列式表示。

思考：任意一个行列式是否都可以用较低阶的行列式表示

下面首先给出来这些二阶行列式的专业定义

(二)讲授新知

定义 1 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} 。

记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ，叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

教 学 过 程	例如 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$, 请说出任意一个元素的余子式和代数余子式。 继续观察开始的三阶行列式, 可以写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ $= M_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - M_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + M_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ $= A_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + A_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 发现 3 阶行列式等于它的任意一行 (列) 的各元素与其对应代数余子式乘积的和。 思考 这样的结论对四阶、五阶、…、n 阶行列式成立吗? 带着这样的问题研究下面的一些行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 根据行列式一般项的特点, 第一行中仅有 $a_{11} \neq 0$, 所以 D 仅含下面的项 $\begin{aligned} & (-1)^{N(j_2 \cdots j_n)} a_{11} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11} \times [(-1)^{N(j_2 \cdots j_n)} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}] \\ &= a_{11} M_{11} \end{aligned}$ 又因为 $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, 所以 $D = a_{11} A_{11}$ $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 为了利用上面的特殊情况, 将该行列式转换成上面的情形, 将第三行依次与第二
----------------------------	--

行，第一行交换，再将第三列依次与第二列，第一列交换，经过 4 次交换（3+3-2），得到了

$$D = (-1)^{3+3-2} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} a_{33} M_{33} = a_{33} A_{33}$$

一般情形

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

可以利用上节课学过的性质，将 D 拆分成具有上述特点的矩阵

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + 0 + 0 + 0 & 0 + a_{22} + 0 + 0 & 0 + 0 + a_{23} + 0 & 0 + 0 + 0 + a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} + a_{24} A_{24} \end{aligned}$$

请同学们对该发现归纳总结

定理 1 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和，即

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

思考：行列式的某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积的和应该等于什么？

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33} + a_{24} A_{34} = 0$$

同理对列也成立

结论：行列式的某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积的和等于零。

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

按行展开行列式的方法称为降阶法。

例 1 计算行列式

$$(1) D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 40 \quad (2) D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -24$$

例 2 讨论当 k 为何值时， $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$

例 3 解矩阵方程 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

例 4 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

例 5 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ ，求 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ 及 $M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14}$

（三）课堂小结

会按行（列）展开行列式，会灵活的应用到行列式的计算中。