

方阵的特征值与特征向量



一、方阵的特征值与特征向量的引例

2

高铁



一、方阵的特征值与特征向量的引例

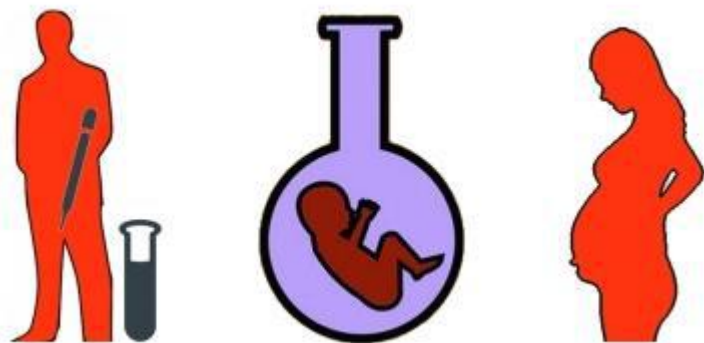
航天飞机定位问题



一、方阵的特征值与特征向量的引例

4

常染色体遗传问题



一、方阵的特征值与特征向量的引例

5

多项式求根问题

求多项式函数 $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$ 的零点

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

$$z^3 = 2z^2 - 4z + 8$$

$$z^2 = z^2$$

$$z = z$$

$$Ax = z x$$

一、方阵的特征值与特征向量的引例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\alpha = 4\alpha$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

二、方阵的特征值与特征向量的概念

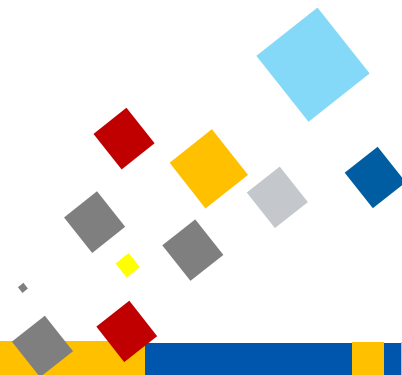
7

定义

设 A 是 n 阶方阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 α 使关系式

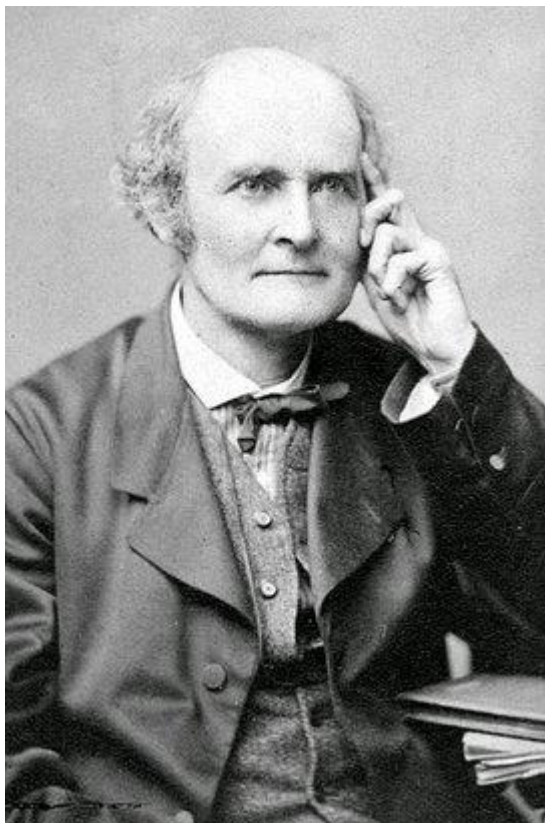
$$A\alpha = \lambda\alpha$$

成立，那么数 λ 称为矩阵 A 的特征值，非零向量 α 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。



二、方阵的特征值与特征向量的概念

科普小知识



凯莱(Arthur Cayley 1821~1895):
英国纯粹数学的近代学派带头人.
矩阵理论的创立者, 1858年发表了
《矩阵论的研究报告》, 系统的阐
述了关于矩阵的理论。

他对线性代数的理论、矢量和张量
分析、高次曲线的性质等都有研究, 写有数学
论文约900篇.

二、方阵的特征值与特征向量的概念

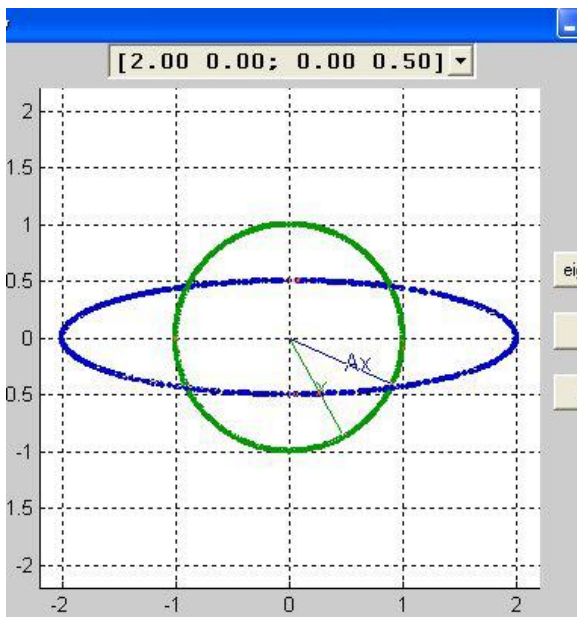
思考题

若 P_1, P_2 皆是 A 的对应于 λ 的特征向量，则下面哪一个向量一定是 A 的对应于 λ 的特征向量？

$$kP_1 \quad \times \quad (k \neq 0)$$

$$P_1 + P_2 \quad \times \quad (P_1 + P_2 \neq 0)$$

什么是特征值与特征向量？



特征向量就是在一个变换过程中不变的向量.

特征值就是特征向量经过变换后长度伸缩的系数.

三、方阵的特征值与特征向量的求法

由特征值的定义知 $A\alpha = \lambda\alpha \quad \alpha \neq 0$

$$(A - \lambda E)\alpha = 0$$

有非
零解

特征向量需要满足的条件

故 $|A - \lambda E| = 0$

特征值需要满足的条件

定义

称多项式 $|A - \lambda E|$ 为方阵 A 的特征多项式

方程 $|A - \lambda E| = 0$ 为 A 的特征方程

定理

n 阶方阵 A 一定有 n 个特征值.

三、方阵的特征值与特征向量的求法

12

总结

1

$$|A - \lambda E| = 0$$

求行列式

特征值

2

$$(A - \lambda_i E) \alpha = 0$$

解齐次线性方程组的基础解系

特征向量

三、方阵的特征值与特征向量的求法

13

例 1

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

三、方阵的特征值与特征向量的求法

14

解 矩阵 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) \end{aligned}$$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

三、方阵的特征值与特征向量的求法

15

当 $\lambda_1 = 1$ 时 解方程 $(A - E)x = 0$

$$\text{由 } A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是 $k\alpha_1$ ($k \neq 0$) 是对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

三、方阵的特征值与特征向量的求法

16

当 $\lambda_2 = 2$ 时 解方程 $(A - 2E)x = 0$

$$\text{由 } A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是 $k\alpha_2$ ($k \neq 0$) 是对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的全部特征向量

三、方阵的特征值与特征向量的求法

当 $\lambda_3 = 3$ 时 解方程 $(A - 3E)x = 0$

$$\text{由 } A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是 $k\alpha_3$ ($k \neq 0$) 是对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量

内容总结：

来源

定义

计算

震动分析，
飞机定位，
常染色体
遗传，多
项式求根

特征值，
特征向量

特征值及
对应的特征向
量的求法

谢谢大家聆听！

