

《概率论与数理统计》模拟试卷 12 参考答案

一、判断题.

1. 事件 A, B 独立, 则 $\bar{A}, \bar{B}$ 也独立. (☒)
2. 概率为 0 的事件, 一定是不可能事件. (☒)
3. 无记忆性是几何分布的特征. (☒)
4. 二维随机变量的联合分布函数不可以确定边缘分布函数. (☒)
5. 若随机变量 X, Y 相互独立的, 则相关系数 $\rho_{XY} = 0$. (☒)
6. 对于任意的 X 和 Y , 都有 $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$. (☒)
7. 二项分布的极限分布是正态分布. (☒)

二、填空题.

1. 设 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3$, 则 $P(A \cup B) = \underline{0.52}$.
2. 当 $C = \underline{\frac{1}{2}}$ 时, $P\{X = k\} = C \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$ ($k = 1, 2, \dots$) 才能成为随机变量.
3. 设随机变量 X 服从 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, 则 $E(\sin X) = \underline{\frac{2}{\pi}}$.
4. 若 X 和 Y 相互独立, $\text{Var}(X) = 2, \text{Var}(Y) = 3$, 则 $\text{Var}(2X - 3Y) = \underline{35}$.
5. 估计量的优良性包括无偏性、有效性和相合性 (或一致性).

三、选择题.

1. 设 A 与 B 互斥, $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则下列结论正确的是 (☒ B).
A. $P(A|B) = P(A)$ B. $P(A|B) = 0$
C. $P(AB) = P(A)P(B)$ D. $P(B|A) > 0$
2. 对于两个随机事件 A 与 B , 则与 $A \cup B = B$ 不等价的是 (☒ D).
A. $A \subset B$ B. $\bar{B} \subset \bar{A}$ C. $A\bar{B} = \phi$ D. $\bar{A}B = \phi$
3. 当 X 的可能值充满 (☒ A), 则 $\phi(x) = \cos x$ 可成为 X 的分布密度.
A. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ C. $[0, \pi]$ D. $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

4. 已知 $X \sim N(0,1)$, 则 $Y = X^2$ 的数学期望为 (C).
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 若 $X \sim N(1,4)$, $Y \sim N(1,9)$ 且 $\rho_{XY} = 0.45$, 则 $\text{Cov}(X,Y) =$ (D).
- A. 2.4 B. 2.5 C. 2.6 D. 2.7
6. 设 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $\text{Var}(X) = \sigma^2$, 根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - \mu| \geq 6\sigma\} \leq$ (C).
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{6}\sigma^2$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{1}{36}\sigma^2$
7. 由列维—林德贝格定理可知, 当 n 充分大时, 则 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim$ (B).
- A. $N(\mu, \sigma^2)$ B. $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ C. $N(0,1)$ D. $N(n\mu, n\sigma^2)$

四、计算题.

1. 设总体 $X \sim N(2,4)$, 随机抽取容量为16的样本, 求 (1) 样本均值 $\bar{X}$ 的分布; (2) $P(1 < \bar{X} < 3)$. ($\Phi(2) = 0.9972$)

解: 因为 $X \sim N(2,4)$, 即 $\mu = 2$, $\sigma^2 = 4$, 由 $n = 16$, 得 $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{16} = 0.25 = (0.5)^2$

所以, $\bar{X} \sim N(2, (0.5)^2)$

$$P(1 < \bar{X} < 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{0.5}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9972 - 1 = 0.9944$$

2. 李教授要外出参加会议, 他乘汽车、火车和飞机的概率分别是0.6、0.3和0.1, 而汽车、火车和飞机晚点到达的概率分别是0.3、0.2和0.1, 则: (1) 他晚点到达的概率有多大? (2) 若已知正点到达, 则他是乘汽车的概率有多大?

解: 设 A_1, A_2, A_3 分别表示“李教授乘汽车、火车和飞机”,

B 表示“正点到达”, $\bar{B}$ 表示“晚点到达”,

依题意可知： A_1, A_2, A_3 构成一个完备事件组.

$$P(A_1)=0.6 \quad P(A_2)=0.3 \quad P(A_3)=0.1$$

$$P(B|A_1)=0.7 \quad P(B|A_2)=0.8 \quad P(B|A_3)=0.9$$

$$P(\bar{B}|A_1)=0.3 \quad P(\bar{B}|A_2)=0.2 \quad P(\bar{B}|A_3)=0.1$$

(1) 由全概率公式可得，李教授晚点到达的概率为：

$$P(B)=\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(\bar{B}|A_i)=0.6\times 0.3+0.3\times 0.2+0.1\times 0.1=0.25$$

(2) 若已知正点到达，由贝叶斯公式知，则他是乘汽车的概率为：

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.6\times 0.7}{0.6\times 0.7+0.3\times 0.8+0.1\times 0.9}=0.56$$

3. 设某次考试的学生成绩服从正态分布，且标准差为16，从中随机抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，样本方差 $s^2=225$ ，问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为这次考试考生的成绩的方差是256？

$$(\chi^2_{0.01}(35)=57.340 \quad ; \quad \chi^2_{0.025}(35)=53.203 \quad ; \quad \chi^2_{0.975}(35)=20.569 \quad ; \\ \chi^2_{0.99}(35)=18.508)$$

解：(1) 待检假设为： $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2(\sigma_0^2=256) \leftrightarrow H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2(\sigma_0^2\neq 256)$

$$(2) \text{ 已知: } n=36, \quad s^2=225, \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{35\times 225}{256}=30.762$$

$$(3) \quad \alpha=0.05, \quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(35)=53.203; \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(35)=20.569$$

$$\text{故拒绝域为: } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq 53.203 \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq 20.569$$

$$(4) \text{ 由于 } 20.569 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 30.762 < 53.203 \text{ 成立,}$$

所以，接受 H_0 ，即认为这次考试考生的成绩的方差仍是256。

4. 某种清漆的干燥时间总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，现随机抽取9个样品测得其干燥时间的样本均值为 $\bar{x}=6$ ，样本方差 $s^2=(0.7)^2$ ，求 μ 的置信度为95%的置信区间？（ $t_{0.005}(8)=3.355$ ， $t_{0.025}(8)=2.306$ ； $t_{0.05}(8)=1.859$ ）

解：已知： $n=9$ ， $\bar{x}=6$ ， $s^2=0.49$ ， $s=0.7$

$$\alpha=0.05, \quad t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$$

$$\text{置信下限: } \underline{\theta} = \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 6 - 2.306 \times \frac{0.7}{\sqrt{9}} = 5.462$$

$$\text{置信上限: } \bar{\theta} = \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 6 + 2.306 \times \frac{0.7}{\sqrt{9}} = 6.538$$

即 μ 的置信水平为95%的置信区间为 $[5.462, 6.538]$.

5. 设随机变量 X 的概率密度为： $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & (0 < x < 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ ，已知

$E(X)=0.5$ ， $Var(X)=0.15$ ，求系数 a 、 b 和 c ？

$$\text{解：由 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c \quad (1)$$

$$0.5 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c \quad (2)$$

因为 $E(X)=0.5$ ， $Var(X)=0.15$ ，而 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

所以， $E(X^2)=Var(X)+[E(X)]^2=0.4$

$$0.4 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 联立方程组，可得： $a=12$ ， $b=-12$ ， $c=3$