

第 4 章 随机变量的数字特征

(A)

一、填空题

1. 已知随机变量 $X \sim N(1, 4)$, $Y = aX + b$, $Y \sim N(0, 1)$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则期望 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$, 方差

$D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 方差分别为 1, 4, 则 $2X - 5Y$ 的方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设随机变量 X 和 Y 的概率密度分别为:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

且 X 和 Y 相互独立, 则 $E(2X - 3Y) = \underline{\hspace{2cm}}$, $D(2X - 3Y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = E(X^2)\} = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5, $E(X) = E(Y) = 0$, $E(X^2) = E(Y^2) = 2$, 则

$E[(X+Y)^2] = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设随机变量 X 的期望 $E(X)$ 为一非负值, 且 $E(\frac{X^2}{2} - 1) = 2$, $D(\frac{X}{2} - 1) = \frac{1}{2}$, 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9, 若 $Z = X - 0.4$, 则 Y 与 Z 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

$X \backslash Y$			
	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X 与 Y 的相关系数 $\rho = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设一次试验成功的概率为 p , 进行 100 次独立重复试验, 当 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 成功次数的标准差的值最大, 其最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择题

1. 袋中有 20 个同样的球，其中 12 个标上数字 1，8 个标上数字 2，现在从袋中任取一球并记住球上的数字后再放回，这样一共进行了 4 次，记 X 为数字 1 出现的次数，则 $E(X) =$ ().

- (A) 1.6 (B) 0.4 (C) 2.4 (D) 9.6

2. 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，且 $E(X) = 7/12$ ，则 ().

- (A) $a = 1, b = -0.5$ (B) $a = -0.5, b = 1$
(C) $a = 0.5, b = 1$ (D) $a = 1, b = 0.5$

3. 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ ，则 $E(2X^2 - 3) =$ ().

- (A) -1 (B) 4 (C) 2 (D) 7

4. 如果随机变量 X 存在二阶原点矩，则下列表达式正确的是 ().

- (A) $E(X^2) < [E(X)]^2$ (B) $E(X^2) \geq [E(X)]^2$
(C) $E(X^2) \geq E(X)$ (D) $E(X^2) < E(X)$

5. 设 X 是随机变量， $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ ，则对任意常数 c ，必有 ().

- (A) $E(X - c)^2 \geq E(X - \mu)^2$ (B) $E(X - c)^2 = E(X - \mu)^2$
(C) $E(X - c)^2 < E(X - \mu)^2$ (D) $E(X - c)^2 = EX^2 - c^2$

6. 已知随机变量 X 服从 $B(n, p)$ ， $E(X) = 4$ ， $D(X) = 3.6$ ，则 ().

- (A) $n = 20, p = 0.2$ (B) $n = 40, p = 0.9$
(C) $n = 10, p = 0.4$ (D) $n = 40, p = 0.1$

7. 已知离散型随机变量 X 满足 $E(X) = 0.1$ ， $D(X) = 0.89$ ，则在下表所示的分布律中， p_1, p_2, p_3 的值分别为 ().

X	-1	0	1
p_i	p_1	p_2	p_3

- (A) 0.4 ; 0.1 ; 0.5 (B) 0.4 ; 0.5 ; 0.1
(C) 0.1 ; 0.4 ; 0.5 (D) 0.4 ; 0.4 ; 0.2

8. 对任意两个随机变量 X 和 Y ，以下选项正确的是 ().

- (A) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ (B) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
(C) $E(XY) = E(X)E(Y)$ (D) $D(XY) = D(X)D(Y)$

9. 二维随机向量 (X, Y) 满足 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 则 ().

(A) $D(XY) = D(X)D(Y)$ (B) $D(X + Y) = D(X - Y)$

(C) X 与 Y 独立 (D) X 与 Y 不独立

10. 设 $X \sim N(3, 2), Y \sim U(2, 8)$, 且 X 与 Y 相互独立 , 则 $D(2X - Y) = ()$.

(A) 7 (B) 5 (C) 11 (D) 1

11. 设 (X, Y) 为二维随机变量 , 则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为 ()

(A) $E(X) = E(Y)$ (B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$ (D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$

12. 将一枚硬币反复抛 n 次 , 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数 , 则 X 和 Y 的相关系数为 () .

(A) -1 (B) 0 (C) 1/2 (D) 1

13. 随机变量 X 与 Y 的方差都存在且大于 0 , 则 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ 是 X 和 Y 的 () .

(A) 不相关的充分条件 , 但非必要条件 (B) 不相关的必要条件 , 但非充分条件

(C) 独立的必要条件 , 但不是充分条件 (D) 独立的充分必要条件

14. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布 , 记 $U = X - Y, V = X + Y$, 则随机变量 U 与 V 必然 () .

(A) 不独立 (B) 独立 (C) 相关系数不为 0 (D) 相关系数为 0

15. 对于任意两个随机变量 X 和 Y , 与命题 “ X 与 Y 不相关 ” 不等价的是 () .

(A) $E(XY) = E(X)E(Y)$ (B) $Cov(X, Y) = 0$

(C) $D(XY) = D(X)D(Y)$ (D) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

16. 随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 () .

(A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$ (B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$

(C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$ (D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

17. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布 , 且方差 $\sigma^2 > 0$, 令随机变量 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 () .

(A) $Cov(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$ (B) $Cov(X_1, Y) = \sigma^2$

$$(C) D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$$

$$(D) D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$$

三、解答题

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_i	0.4	0.3	0.3

求 $E(X)$, $E(X^2)$, $E(3X+5)$.

2. 同时掷八颗骰子, 求八颗骰子所掷出的点数和的数学期望.

3. 某图书馆的读者借阅甲种图书的概率为 p_1 , 借阅乙种图书的概率为 p_2 , 设每人借阅甲乙图书的行为相互独立, 读者之间的行为也是相互独立的.

- (1) 某天恰有 n 个读者, 求借阅甲种图书的人数的数学期望.

- (2) 某天恰有 n 个读者, 求甲乙两种图书至少借阅一种的人数的数学期望.

4. 将 n 个考生的录取通知书分别装入 n 个信封, 在每个信封上任意写上一个考生的姓名、地址发出, 用 X 表示 n 个考生中收到自己通知书的人数, 求 $E(X)$.

5. 设 $X \sim P(\lambda)$, 且 $P\{X=5\} = P\{X=6\}$, 求 $E(X)$.

6. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\} = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, $k=1, -2, 3, -4, \dots$, 问 X 的数学期望是否存在?

7. 某城市一天水的消费量 X (百万升计) 是一个随机变量, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} x e^{-x/3}, & x > 0, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求一天的平均耗水量.

8. 设某种动物的寿命 X (以年计) 是一个随机变量, 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{25}{x^2}, & x > 5, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求这种动物的平均寿命 $E(X)$.

9. 在美国致命的汽车事故所占的比例 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 42x(1-x)^5, & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求 X 的数学期望 $E(X)$.

10. 设随机变量 X 的概率密度如下, 求 $E(X)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1+x)^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{3}{2}(1-x)^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

11. 设 $X \sim B(4, p)$, 求数学期望 $E(\sin \frac{\pi X}{2})$.

12. 设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布, 飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数: $W = kV^2$,
($k > 0$, 常数), 求 W 的数学期望.

13. 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	3/28	9/28	3/28
1	3/14	3/14	0
2	1/28	0	0

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(X - Y)$.

14. 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求

$E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.

15. 某工厂完成某批产品生产的天数 X 是一个随机变量, 具有分布律

X	10	11	12	13	14
p_i	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

所得利润 (以元计) 为 $Y = 1000(12 - X)$, 求 $E(X)$, $D(X)$.

16. 设随机变量 X 服从几何分布, 其分布律为 $P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p, k = 1, 2, \dots$,

其中 $0 < p < 1$ 是常数, 求 $E(X)$, $D(X)$.

17. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 试求 $E(X)$, $D(X)$.

18. 设随机变量 (X, Y) 具有 $D(X) = 9$, $D(Y) = 4$, $\rho_{XY} = -1/6$, 求 $D(X + Y)$,
 $D(X - 3Y + 4)$.

19. 在题 13 中求 $Cov(X, Y)$, ρ_{XY} .

20. 在题 14 中求 $Cov(X, Y)$, ρ_{XY} , $D(X + Y)$.

21. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的, 但 X 和 Y 不是相互独立的.

22. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2, & |y| < 2x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

验证 X 和 Y 是不相关的, 但 X 和 Y 不是相互独立的.

四、应用题

1. 某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量。他们估计出售一件产品可获利 m 元，而积压一件产品导致 n 元的损失。再者，他们预测销售量 Y (件) 服从参数 θ 的指数分布，问若要获得利润的数学期望最大，应该生产多少件产品？(设 m, n, θ 均为已知)。

2. 设卖报人每日的潜在卖报数 X 服从参数为 λ 的泊松分布。如果每卖出一份报可得报酬 m 元，卖不掉而退回则每份赔偿 n 元。若某日卖报人买进 r 份报，求其期望所得以及最佳的卖报份数。

(B)

1. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

- (1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望；
- (2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

2. 随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，对 X 独立重复观察 4 次，用 Y

表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望。

3. 设随机变量 U 在区间 $(-2, 2)$ 上服从均匀分布，随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leq -1 \\ 1, & \text{若 } U > -1 \end{cases}; \quad Y = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leq 1 \\ 1, & \text{若 } U > 1 \end{cases}$$

试求：(1) X 和 Y 的联合分布律；(2) $D(X+Y)$ 。

4. 设随机变量 X 的期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 存在，且有 $E(X) = a, D(X) = b(b > 0)$ ，

$Y = \frac{X-a}{\sqrt{b}}$ ，证明 $E(Y) = 0, D(Y) = 1$ 。

5. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, (k = 1, 2, \dots)$ ，且 $E(X), E(X^2), D(X)$

都存在，试证明：函数 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x)^2 p_k$ 在 $x = E(X)$ 时取得最小值，且最小值为 $D(X)$ 。

6. 随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的分布律为

X	1	2
p_i	2/3	1/3

记 $U = \max(X, Y), V = \min(X, Y)$ ，

- (1) 求 (U, V) 的分布律；
- (2) 求 U 与 V 的协方差 $\text{Cov}(U, V)$

7. 随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & -1 < x < 0 \\ 1/4, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 求 $\text{Cov}(X, Y)$.

8. 对于任意二事件 A 和 B , $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $\rho = \frac{P(AB) - P(A) \cdot P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$

称作事件 A 和 B 的相关系数.

(1) 证明事件 A 和 B 独立的充分必要条件是相关系数等于零.

(2) 利用随机变量相关系数的基本性质, 证明 $|\rho| \leq 1$.