

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____

所在单位_____

授课班级_____

专业_____

撰写时间_____

教案编号	08-0301	教案内容	3.1 二维随机变量 3.2 边缘分布	学时	2
教学目标	基本要求	1. 掌握多维随机变量、二维随机变量分布函数的概念和性质； 2. 理解二维离散型随机变量联合分布律的概念及性质，会求二维离散型随机变量联合分布律，掌握二维连续型随机变量的联合概率密度函数的概念及性质，会求二维连续型随机变量的联合概率密度； 3. 理解区分随机变量边缘分布的概念，会求二维离散型随机变量边缘分布律及二维连续型随机变量边缘密度函数，能写出随机变量的联合分布与其边缘分布间的关系；			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性； 2. 具体体现在：本章是第二章一维随机变量的各个概念方法到二维的扩展，本章涉及到很多积分、导数、函数、反函数等的概念和计算。并且将一维分布和条件分布扩展到二维以后，更加适用于实际工程问题。			
教学重点	(1) 二维随机变量(X,Y)的分布函数的概念，二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度和离散型随机变量(X,Y)的分布律； (2) 离散型随机变量(X,Y)的边缘分布律和连续型随机变量(X,Y)的边缘概率密度。				
教学难点	二维随机变量的边缘分布				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述（5 分钟） 在上一章中，我们主要学习了一维随机变量的概念和分布，以及随机变量的函数的分布： 其目的是理解并掌握随机变量的概念及其一维分布，会计算随机变量函数的分布。 本章我们将一维的概念扩展到二维随机变量当中：					板书， 回顾

其目的是对一维随机变量所有概念的深化扩展，并掌握二维以及多维随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布，以及二维随机变量函数的分布。

本次课主要讲解二维随机变量的联合分布以及边缘分布。

第二部分：二维随机变量的分布（45 分钟）

很多实际问题中，随机试验的结果需同时用两个或更多个随机变量来描述。

比如：设样本空间 $S=\{e\}=\{\text{某地区全部儿童}\}$

儿童发育情况包括：身高 $H(e)$ 和体重 $W(e)$ ，它们是定义在 S 上的两个随机变量。

比如： $S=\{e\}=\{\text{炮弹的弹着点}\}$

炮弹弹着点的位置：横坐标 $X(e)$ 和纵坐标 $Y(e)$ ，他们也是定义在同一个样本空间上的两个随机变量。

定义：一般，设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$ ，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y) ，叫做**二维随机向量**，或**二维随机变量**。

二维随机变量的研究：**要将 X,Y 作为整体来研究**，其性质与 X 、 Y 及 X,Y 之间的关系均有关，逐个研究 X,Y 的性质是不够的。也借助分布函数来研究二维随机变量。

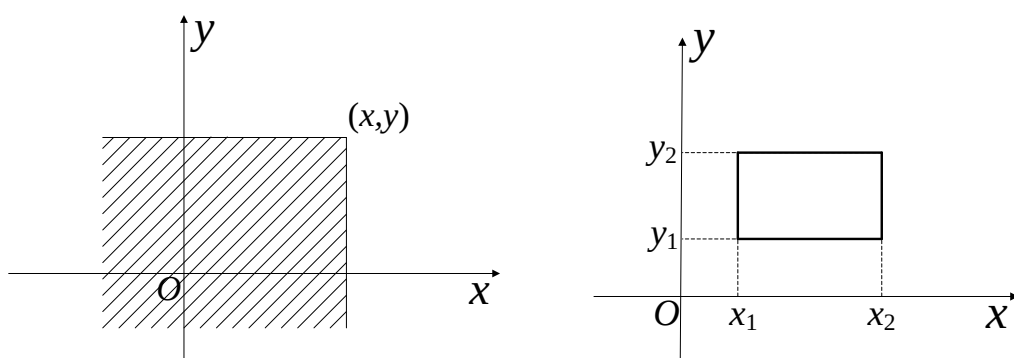
定义：设 (X,Y) 是二维随机变量，对于任意实数 x, y ，二元函数：

$$F(x,y)=P\{(X\leq x)\cap(Y\leq y)\} \text{ 记做 } P\{X\leq x, Y\leq y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的**分布函数**，或称为随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**。

分布函数的意义：

将 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标，则分布函数 $F(x,y)$ 在点 (x,y) 处的函数值是随机点 (X,Y) 落在以 (x,y) 为顶点的左下方的无穷矩形区域内的概率



随机点落在矩形区域的概率：

$$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

分布函数的性质：

1° $F(x,y)$ 是变量 x, y 的不减函数

对任意的 y ，当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$

对任意的 x ，当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$

重点

2° $0 \leq F(x, y) \leq 1$ 且

对任意固定的 y , $F(-\infty, y) = 0$ (边界无限向左, 趋于不可能事件)

对任意固定的 x , $F(x, -\infty) = 0$ (边界无限向下, 趋于不可能事件)

$F(-\infty, -\infty) = 0$, (边界无限向左下, 趋于不可能事件)

$F(\infty, \infty) = 1$, (边界无限向右上, 趋于必然事件)

3° $F(x, y) = F(x+0, y)$, $F(x, y) = F(x, y+0)$

$F(x, y)$ 关于 x 右连续, 关于 y 也右连续

4° 对于任意点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, 下述不等式成立:

$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$ 矩形区内的概率, 及概率非负性

离散型的随机变量: 若二维随机变量 (X, Y) 全部可能取到的不相同的值是 **有限对或可列无限多对**, 则称 (X, Y) 是离散型随机变量。

二维离散型随机变量的分布律:

设二维离散型随机变量 (X, Y) 所有可能取的值为 (x_i, y_j) , $i, j = 1, 2, \dots$,

记 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$, 则由概率的定义有:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

则称 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$ 为二维离散型随机变量 (X, Y) 的 **分布律**, 或随机变量 X 和 Y 的 **联合分布律**。

也可以用表格的形式给出:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{i1}	$\dots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{i2}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_i	p_{1j}	p_{2j}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数

将 (X, Y) 看作一个随机点的坐标, 则离散型随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为: 包含在以 (x, y) 为顶点的左下方无穷矩形区域内的所有可能取值点的概率的和, 即

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij} \quad \text{其中和式是对一切满足 } x_i \leq x, y_j \leq y \text{ 的 } i, j \text{ 来求和的}$$

例 1: 设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取一个值, 另一个随机变量 Y 在

1~X 中等可能地取一整数值。试求(X,Y)的分布律。

解: Y 的取值与 X 的取值有关, $i=1, 2, 3, 4, j$ 取不大于 i 的正整数, 由乘法定理 $P\{X=i, Y=j\} = P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\} = (1/i)(1/4)$, $i=1, 2, 3, 4, 1 \leq j \leq i$

Y \ X	1	2	3	4
1	1/4	1/4(1/2)	1/4(1/3)	1/4(1/4)
2	0	1/4(1/2)	1/4(1/3)	1/4(1/4)
3	0	0	1/4(1/3)	1/4(1/4)
4	0	0	0	1/4(1/4)

二维连续型随机变量的概率密度:

对于二维随机变量(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$, 如果存在非负的函数 $f(x,y)$, 使对任意 x,y 有 $F(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u,v) du dv$, 则称(X,Y)是连续型的二维随机变量, 函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量(X,Y)的概率密度, 或称随机变量 X 和 Y 的联合概率密度。

$f(x,y)$ 的性质:

1° 非负性 $f(x,y) \geq 0$ 曲线 $z=f(x,y)$ 表示一个曲面, 位于 xOy 平面的上方

2° 归一性 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v) du dv = F(\infty, \infty) = 1$

曲面 $z=f(x,y)$ 与 xOy 平面的空间区域的体积为 1

3° 设 G 是 xOy 平面上的区域, 点(X,Y)落在 G 内的概率为

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y) dx dy$$

在几何上, 以 G 为底, 以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的柱体体积

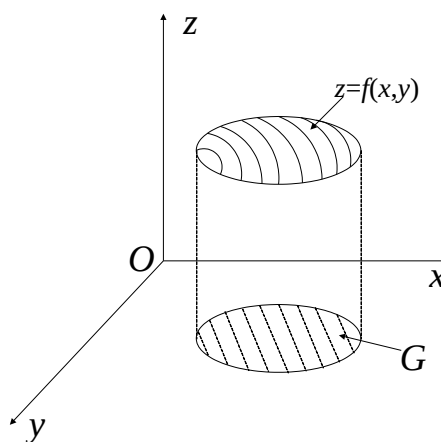
4° 若 $f(x,y)$ 在点(x,y)处连续, 则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

面密度的概念: 由性质, 在 $f(x,y)$ 的连续点(x,y)处有

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0+ \\ \Delta y \rightarrow 0+}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y)}{\Delta x \Delta y}$$

由分布函数的定义, 分子刚好是落在矩形区域的概率, 即



$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0+ \\ \Delta y \rightarrow 0+}} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

当 $\Delta x \Delta y$ 很小时, $P\{x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y$, 即随机点落在长方形 $(x, x + \Delta x) \times (y, y + \Delta y]$ 内的概率近似等于长方体的体积, 以上比值表明, **概率密度为: 单位面积上的概率值: 面密度。**

PPT

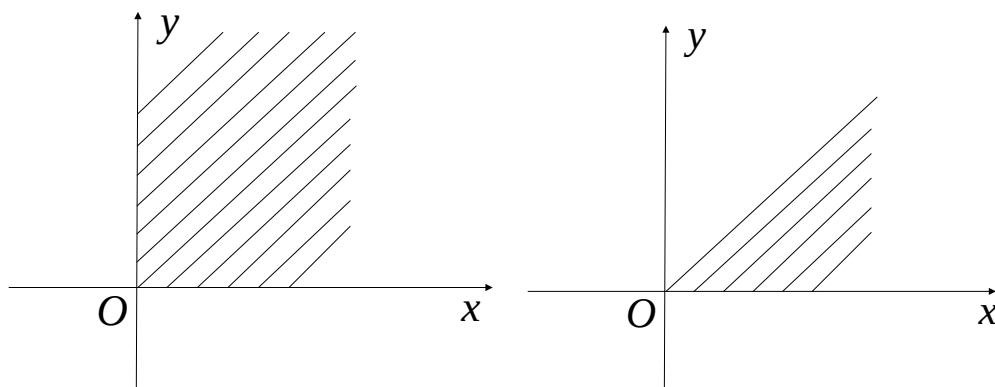
例 2: 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x, y)$; (2) 求概率 $P\{Y \leq X\}$;

解: (1) 直接由定义: 先在图像上画出非 0 区

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv = \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 2e^{-(2x+y)} dx dy, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$



(2) $P\{Y \leq X\}$

有效区 G 由 $x > 0, y > 0$ 及 $y < x$ 确定: 先 x 后 y 的话, $y < x < \infty, 0 < y < \infty$

$$P\{Y \leq X\} = P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_y^\infty 2e^{-(2x+y)} dx dy = 1/3$$

推广到 n 维:

定义: 一般, 设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, 设 $X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), \dots, X_n = X_n(e)$ 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 叫做 **n 维随机向量**, 或 **n 维随机变量**

分布函数

定义 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 n 维随机变量, 对于 n 个任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, n 元函数:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的**分布函数**，或称为随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的**联合分布函数**。

具有同二维随机变量类似的性质。

第三部分：二维随机变量的边缘分布（40 分钟）

二维随机变量 (X, Y) 具有分布函数 $F(x, y)$ ，它描述的是整体的性质，有时我们也要考察 X 或者 Y 的个体性质，也就是我们关心的 $F_X(x)$ ， $F_Y(y)$ 是怎样的？并且分别将 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 称为 X 和 Y 的**边缘分布函数**。

边缘分布函数的求解：已知联合分布 $F(x, y)$ ，求解边缘分布

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

由于 $\{Y < \infty\}$ 是必然事件，所以 $\{X \leq x\} \cap \{Y < \infty\} = \{X \leq x\}$

$$\therefore F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{(X \leq x) \cap (Y < \infty)\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

同理： $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{(X < \infty) \cap (Y \leq y)\} = P\{X < \infty, Y \leq y\} = F(\infty, y)$

离散型随机变量的边缘分布律：

(X, Y) 的分布函数为 $F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

则 $F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{x_i \leq x} (\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij})$ ，与第二章分布律与分布函数的关系式进行比较，

括号内的部分即为 $P\{X = x_i\}$

所以， X 的分布律为 $P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_{i\cdot}$ ， $i = 1, 2, \dots$

同理， Y 的分布律为 $P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = p_{\cdot j}$ ， $j = 1, 2, \dots$

则分别称 $p_{i\cdot}$ ($i = 1, 2, \dots$) 和 $p_{\cdot j}$ ($j = 1, 2, \dots$) 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘分布律**。

※注意：边缘分布律的和式可以理解为一种全概率展开：以 Y 取值为划分对 X 取值的全概率展开。

连续型随机变量的边缘概率密度：

(X, Y) 的概率密度函数为 $f(x, y)$ ，

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^x [\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy] dx$$

与概率密度函数定义相比较：

得, X 是连续型随机变量, 且 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

同样, Y 是连续型随机变量, 且 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$

分别称 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 为随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度。

PPT

例 1: 求解离散型随机变量的边缘分布律

一整数 N 等可能地在 $1, 2, 3, \dots, 10$ 十个值中取一个值。设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数 (1 不是素数)。试写出 D 和 F 的联合分布律, 并求边缘分布律。

解: 先考察 D, F 取值的情况

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

D 的所有可能取值为 $1, 2, 3, 4$; F 的所有可能取值是 $0, 1, 2$, 容易得到 (D, F) 取 $(i, j), i=1, 2, 3, 4, j=0, 1, 2$ 的概率。

$P\{D=1, F=0\}=1/10, P\{D=2, F=1\}=4/10$, 样本点为 $2, 3, 5, 7, \dots$

(D, F) 的联合分布律及边缘分布律为

$F \backslash D$	1	2	3	4	$p_{\cdot j} = P\{F=j\}$
0	$1/10$	0	0	0	$1/10$
1	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
2	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$p_{i \cdot} = P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

即 D 和 F 的边缘分布律为

D	1	2	3	4
$p_{i \cdot}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$

F	0	1	2
$p_{\cdot j}$	$1/10$	$7/10$	$2/10$

PPT

例 2: 求解连续型随机变量的边缘概率密度

设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和

$f_Y(y)$ 。

解: 由边缘概率密度的定义

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

首先确定积分区域

(x 的范围, y 的积分区间 (积分限))

通过 $f(x,y)$ 中关于 x 和 y 的约束关系求得 x 的取值范围, 及 y 的积分区间, 即由 $x^2 \leq y \leq x$, 可推导出 $0 \leq x \leq 1$,

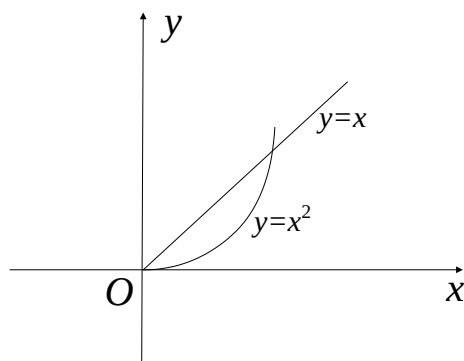
或者画出积分区域, 从而确定 x 和 y 的范围:

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{x^2}^x 6dy = 6(x - x^2),$$

其它, $f_X(x) = 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) =$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \text{由 } x^2 \leq y \leq x, \quad y \leq x \leq \sqrt{y}$$

$$\text{所以 } f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6dx, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

PPT

例 3: 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的**二维正态分布**, 记做 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 。求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

解: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, 对 y 的积分

$$\text{整理: } \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = (1-\rho^2) \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \left[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} - \rho \frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} \right]^2$$

$$\text{代入上式得 } f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} - \rho \frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} \right]^2} dy$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} - \rho \frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} \right], \quad -\infty < y < \infty \text{ 所以 } -\infty < t < \infty, \text{ 而 } dt = dy \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$\text{代入得 } \therefore f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{同理 } f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad -\infty < y < \infty$$

$\therefore X, Y$ 均为一维正态分布, 且与 ρ 无关。

※ 单由 X, Y 的边缘分布不能确定联合分布, 必须整体考虑。

课后作业 p84: 2,3,4,7,9; 数值实验作业、其它要求

课后小结 以下几个方面应该着重强调:

- | | |
|--|--|
| | <ol style="list-style-type: none">1. 二维随机变量联合分布的几何意义；2. 边缘分布的含义以及与一维分布的关系；3. 边缘分布和联合分布的关系。 |
|--|--|

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____

所在单位_____

授课班级_____

专业_____

撰写时间_____

教案编号	09-0302	教案内容	3.3 条件分布 3.4 相互独立的随机变量	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 掌握二维随机变量(X, Y)的条件分布的概念和计算（离散型和连续型）； (2) 理解随机变量的独立性的概念，掌握离散型随机变量及连续型随机变量独立性的判别方法；会用随机变量的独立性计算某些事件的概率。			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性； 2. 具体体现在：本章是第二章一维随机变量的各个概念方法到二维的扩展，本章涉及到很多积分、导数、函数、反函数等的概念和计算。并且将一维分布和条件分布扩展到二维以后，更加适用于实际工程问题。			
教学重点	(1) 二维随机变量(X,Y)的条件分布的概念和计算（离散型和连续型）； (2) 两个随机变量相互独立的判别。				
教学难点	二维随机变量的条件分布				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述（5 分钟） 在上一节中，我们主要学习了二维随机变量的概念和联合分布以及边缘分布：其目的是理解并掌握随机变量的二维分布的定义和几何含义，以及边缘分布的计算。本节我们将进一步讨论二维随机变量的条件分布，以及两个随机变量相互独立的条件： 其目的是学会计算二维随机变量的条件分布，会判别两个随机变量是否相互独立。 本次课主要讲解二维随机变量的条件分布以及两个随机变量独立性的判定。					板书，

第二部分：二维随机变量的条件分布（55 分钟）

由条件概率自然引出条件概率分布的概念

离散型随机变量的条件分布律：

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots$$

(X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, \quad P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j=1, 2, \dots$$

考虑在事件 $\{Y=y_j\}$ 发生的条件下，事件 $\{X=x_i\}$ 发生的概率，即求事件

$$\{X=x_i | Y=y_j\}, \quad i=1, 2, \dots$$

发生的概率

由条件概率公式：

$$P\{X=x_i | Y=y_j\}=P\{X=x_i, Y=y_j\} / P\{Y=y_j\}=p_{ij}/p_{\cdot j}, \quad i=1, 2, \dots$$

其中 $P\{Y=y_j\}>0$

该条件概率具有分布律的性质：

1. 非负性

$$2. \text{ 归一性: } \sum_{i=1}^{\infty} P\{X=x_i | Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{1}{p_{\cdot j}} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \frac{1}{p_{\cdot j}} p_{\cdot j} = 1$$

条件分布律定义：设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j ，若 $P\{Y=y_j\}>0$ ，则称 $P\{X=x_i | Y=y_j\}=P\{X=x_i, Y=y_j\} / P\{Y=y_j\}=p_{ij}/p_{\cdot j}, \quad i=1, 2, \dots$ 为在 $Y=y_j$ 条件下，**随机变量 X 的条件分布律**。

同样的，对于固定的 i ，若 $P\{X=x_i\}>0$ ，则称 $P\{Y=y_j | X=x_i\}=P\{X=x_i, Y=y_j\} / P\{X=x_i\}=p_{ij}/p_{i\cdot}, \quad j=1, 2, \dots$ 为在 $X=x_i$ 条件下，**随机变量 Y 的条件分布律**。

例 2：一射手进行射击，击中目标的概率为 $p(0<p<1)$ ，射击直到击中目标两次为止。

PPT

设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律及条件分布律。

解：实际上本题是求三个分布律：

$$P\{X=m, Y=n\}, \quad P\{Y=n | X=m\}, \quad P\{X=m | Y=n\}$$

按题意， $Y=n$ 表示第 n 次射击时击中目标，且在前 $n-1$ 次射击中恰有一次击中目标，各次射击是相互独立的。这样 $\{Y=n, X=m\}$ 表示分别在第 m 次和第 n 次击中目标而其它 $n-2$ 次没击中这一事件。

于是

$$P\{X=m, Y=n\} = \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{\text{第 } m \text{ 次}} \cdot \underbrace{p \cdots (1-p) \cdots p}_{\text{第 } n \text{ 次}} = p^2(1-p)^{n-2}$$

即联合分布律为 $P\{X=m, Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2}$, $m=1, 2, \dots, n=2, 3, \dots, m < n$

又关于 X 的边缘分布律:

$$P\{X=m\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X=m, Y=n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2} = \frac{p^2(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)} = p(1-p)^{m-1},$$

$$m=1, 2, \dots$$

$$P\{Y=n\} = \sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n=2, 3, \dots$$

于是由条件分布律的定义:

当 $m=1, 2, \dots$ 时

$$\begin{aligned} P\{Y=n | X=m\} &= P\{Y=n, X=m\} / P\{X=m\} = p^2(1-p)^{n-2} / p(1-p)^{m-1} \\ &= p(1-p)^{n-m-1}, \quad n=m+1, m+2, \dots \end{aligned}$$

当 $n=2, 3, \dots$ 时

$$\begin{aligned} P\{X=m | Y=n\} &= P\{Y=n, X=m\} / P\{Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2} / (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \\ &= 1/(n-1), \quad m=1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

※ 在写条件分布律 $P\{Y=n | X=m\}$ 时一定在分布律之前给出条件 $P\{X=m\}$ 不等于 0 的范围, 而在分布律之后也要注明 Y 的取值范围。

连续型随机变量的条件概率密度:

对于连续型随机变量由于对于任意的 x 或者 y , $P\{Y=y\}=0$, $P\{X=x\}=0$, 无法用条件概率公式计算 $P\{X=x | Y=y\}$ 。

转而求分布函数 $P\{X \leq x | Y=y\}$ 并记为 $F_{X|Y}(x|y)$

由于 $P\{Y=y\}=0$, 我们讨论在一个充分小的邻域内事件 $\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}$ 发生的条件下的 $X \leq x$ 的概率 $P\{X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}$, 其中 $P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} > 0$

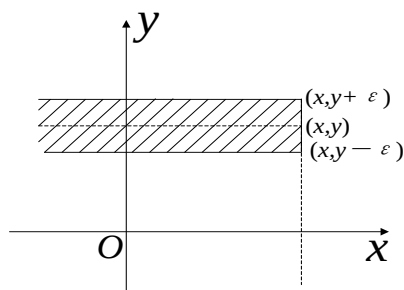
然后对任意的 x , 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 对 $P\{X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}$ 取极限得到 $F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y=y\}$

$$P\{X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P\{X \leq x, y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}{P\{Y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x, y+\varepsilon) - F(x, y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y-\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[F(x, y+\varepsilon) - F(x, y-\varepsilon)] / 2\varepsilon}{[F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y-\varepsilon)] / 2\varepsilon} = \frac{\partial F(x, y) / \partial y}{dF_Y(y) / dy}$$

$$= \frac{\partial / \partial y \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy}{f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx dy$$



$$\text{类似的有 } F_{Y|X}(y|x) = \frac{\partial F(x, y) / \partial y}{dF_Y(y) / dy} = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dx dy$$

与概率密度的定义比较，给出条件概率密度的定义

条件概率密度定义： 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x, y)$ ，(X,Y)关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$ ，若对于固定的 y ， $f_Y(y) > 0$ ，则称 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 为 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度，记为 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ ，

$$\text{度，记为 } f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

称 $F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$ 为 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布函数

$$\text{类似的有 } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$

※在求解条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 时，前面要给出条件 $f_Y(y) > 0$ 的 y 的区间，在后面给出 x 的取值范围。在 $(-\infty, \infty)$ 区间上都有定义。

PPT

例 3 有界区域内的均匀分布

定义：设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A 。若二维随机变量(X,Y)具有概率密度 $f(x, y)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 则称}(X,Y)\text{在 } G \text{ 上服从均匀分布。}$$

现设(X,Y)在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 。

解：1) 求联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

2) 求边缘概率密度, 确定满足 $f_Y(y)>0$ 的 y 的范围

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

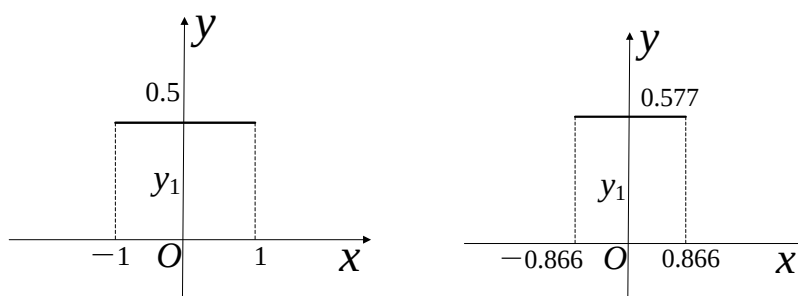
3) 在 y 的范围内计算条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)/f_Y(y)$

当 $-1 < y < 1$ 时有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \frac{1}{\pi} / \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} = 1/(2\sqrt{1-y^2}), & -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于区域 G , 固定 y 可解得 x 的 $f_{X|Y}(x|y)$ 非 0 范围, 注意条件概率中, 作为条件的 y 是确定的实数, y 的取值不同获得的条件概率密度也不同

当 $y=0$ 时, 及 $y=1/2$ 时 $f_{X|Y}(x|y)$ 均是相应区间上的均匀分布, 但区间长短和概率密度值不同。



PPT

例 4: 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值, 当观察到 $X=x(0 < x < 1)$ 时, 数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机地取值, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$. **由条件概率密度—》联合概率密度—》边缘概率密度**

解: 由题意, X 具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 在 $(0 < x < 1)$ 区间内, 对于任意给定的

x , 在 $X=x$ 条件下, Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

由于 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$, 所以 $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$ (类似于乘法定理)

※这里要把 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $f_X(x)$ 的非 0 区间合并, 其它区域联合密度为 0

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{于是 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

第三部分：相互独立的随机变量（20 分钟）

本节学习两个随机变量相互独立的重要概念，通过两个事件的独立性来研究

定义： 设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数，若对于所有 x,y 有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\},$$

$$\text{即 } F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 和 Y 是**相互独立**的。

对于连续型随机变量 (X, Y) ， $f(x,y)$ 及 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别为其概率密度和边缘概率密度：

X 和 Y 相互独立的条件等价于 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立

几乎处处成立的意义是，除去平面上面积为 0 的集合(点，线)以外，处处成立

对于离散型随机变量 (X, Y) ，

X 和 Y 相互独立的条件等价于 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$ 对于 X 和 Y 的所有可能取值 (x_i, y_j) 都成立，或记为 $p_{ij} = p_{i \cdot} p_{\cdot j}$ ， $i, j = 1, 2, \dots$

※在实际中，考察两个随机变量的独立性往往用概率密度和分布律的定义比较方便

二维正态随机变量 (X, Y) 的独立性问题

此时 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

而前面已经证明： $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\text{对任意的 } x,y \text{ 有 } f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{\frac{-1}{2} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

∴ 有如下结论：

1° 当 $\rho=0$ 时， $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 处处成立， X 和 Y 相互独立

2° 若 X 和 Y 相互独立，则由于 $f(x,y)$ 及 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 是连续函数，对任意的 x,y 有 $f(x,y)$

$$= f_X(x)f_Y(y), \text{ 不妨令 } x=\mu_1, y=\mu_2 \text{ 代入等式有 } \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}, \text{ 即 } \rho=0.$$

综上：对于二维正态随机变量 (X, Y) ， X 和 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho=0$

在第二节的例 1 中， F 和 D 由于 $P\{D=1, F=0\} = 1/10 \neq P\{D=1\} \times P\{F=0\}$ 因而不是相

互独立的

PPT

例：一负责人到达办公室的时间均匀分布在 8~12 时之间，

他的秘书到达办公室的时间均匀分布在 7~9 时之间，设两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟=1/12 小时的概率

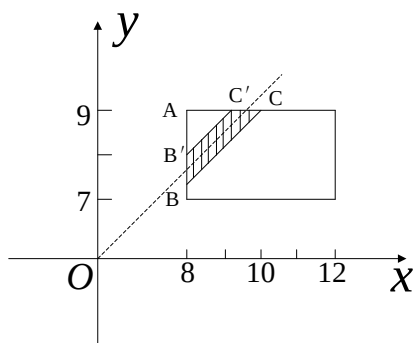
解：设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间，则相应的概率密度：

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & 8 < x < 12 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & 7 < y < 9 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{求 } P\{|X-Y| \leq 1/12\}$$

先求联合概率密度 $f(x,y)$

$$\text{由于二者独立, } f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} (1/4)(1/2), & 8 < x < 12, 7 < y < 9 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

为求概率首先画出区域 $|y-x| \leq 1/12$



概率密度函数与区域 $|y-x| \leq 1/12$ 的公共部分 G 是四边形 BCC'B' 仅当 X 和 Y 的取值落在区域 G 内时，相差不超过 1/12 小时，于是

$$\begin{aligned} P\{|X-Y| \leq 1/12\} &= \iint_G f(x,y) dx dy = 1/8 \times (\text{G 的面积}) \quad (\text{由于 } f(x,y) \text{ 是均匀分布}) \\ &= 1/8 \times (\Delta ABC \text{ 的面积} - \Delta AB'C' \text{ 的面积}) \\ &= 1/8 \times [1/2(1+1/12)^2 - 1/2(1-1/12)^2] = 1/48 \end{aligned}$$

第三部分：推广到 n 维（10 分钟）

推广到 n 维：

①分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数定义为，对于 n 个任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, n 元函数：

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$ 称为 n 元随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数。

②概率密度

若存在非负函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，对于任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 元随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率密度函数。

③边缘分布函数

n 元随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 已知, 则 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的 k 维边缘分布函数就随之确定。如:

关于 X_i 的边缘分布函数为: $F_{X_i}(\infty \dots \infty, x_i, \infty \dots \infty)$

关于 X_i, X_j 的边缘分布函数为: $F_{X_i, X_j}(\infty \dots \infty, x_i, \infty \dots \infty, x_j, \infty \dots \infty)$

④边缘概率密度函数

若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率密度, 则

关于 X_i 的边缘概率密度 $f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$

关于 X_i, X_j 的边缘概率密度

$$f_{X_i, X_j}(x_i, x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n$$

⑤独立性

若对于所有的实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 有 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n)$

则称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立。

⑥独立性 2

若对于所有的实数 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ 有

$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) F_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 其中 F_1, F_2, F 依次为随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_m), (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 和 $(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 的分布函数, 则称随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 是相互独立的。

定理:

设 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 相互独立, 则 $X_i (i=1, 2, \dots, m)$ 和 $Y_j (j=1, 2, \dots, n)$ 相互独立。又若 h, g 是连续函数, 则 $h(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 相互独立。

证明: 对于第一个命题, 通过分布函数和边缘分布函数的关系可证明

$$F_{X_i}(x_i) = F_{X_i}(\infty \dots \infty, x_i, \infty \dots \infty), \dots$$

由 $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) F_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 易于得出边缘分布函数满足 $F_{X_i, Y_j}(x_i, y_j) = F_{X_i}(x_i) F_{Y_j}(y_j)$

对于第二个命题, 令 $Z_1 = h(X_1, X_2, \dots, X_m), Z_2 = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

$$F(z_1, z_2) = P\{Z_1 \leq z_1, Z_2 \leq z_2\} = P\{h(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq z_1, g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq z_2\}$$

$$= P\{(X_1, X_2, \dots, X_m) \in G_1, (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in G_2\}$$

这是关于随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 和随机变量 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 的概率表达式

由于二者独立 $= P\{(X_1, X_2, \dots, X_m) \in G_1\} P\{(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in G_2\}$

$$= P\{h(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq z_1\} P\{g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq z_2\}$$

$$= P\{Z_1 \leq z_1\} P\{Z_2 \leq z_2\} = F_{Z_1}(z_1) F_{Z_2}(z_2)$$

	多维随机变量的研究中，一般从多维分布函数，概率密度，分布律出发来求得边缘，条件分布。	
课后作业	p85: 11,13,14,15,17,18,20; 数值实验作业、其它要求	
课后小结	以下几个方面应该着重强调： 1. 二维连续型随机变量在单点的条件概率和某一个范围内的条件概率计算方法不同； 2. 多个独立性判定条件之间的关系，以及在后续章节还会有新的判定条件加入。	

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____ 所在单位_____

授课班级_____ 专业_____ 撰写时间_____

教案编号	10-0302	教案内容	3.5 两个随机变量的函数的分布	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 会求两个随机变量的简单函数（如两个随机变量线性组合函数、相互独立的 n 个随机变量最大值函数和最小值函数）的分布。 (2) 两个随机变量商的概率密度函数可以不讲。			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性；			
教学重点	二维随机变量的函数求解的一般方法 两个随机变量的线性组合、多个随机变量的最值的求解				
教学难点	两个随机变量的线性组合				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述（5 分钟） 在上一节中，我们主要学习了条件分布和独立性： 尤其是连续随机变量的条件概率，在解决取单点值条件下的概率分布问题的描述本节我们将重点讨论两个随机变量的函数分布的求解问题： 第二部分：二维随机变量的条件分布（55 分钟） §5 两个随机变量的函数的分布 类似于一个随机变量的函数的分布，讨论两个随机变量的函数的分布 本节只讨论两种特殊的情形，并且给出一个相对一般的解题过程 在第二章第 5 节给出了一个步骤： 1° 先写出 Y 的分布函数定义式：$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}$ 由 $Y=g(X)$确定 Y 的取值范围，当 y 不在值域范围内时单独讨论，如 $a<Y<b$					板书， 回顾

则当 $y < a$ 时 $F_Y(y) = 0$, $y > b$ 时 $F_Y(y) = 1$, 当 $a < Y < b$ 时继续

2° 将 $Y=g(X)$ 代入上式 $= P\{g(X) \leq y\}$

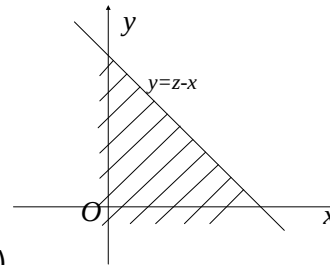
3° 由 $g(X) \leq y$ 求解 X 的范围 $= P\{X | g(X) \leq y\}$ 表示为 y 的形式

4° 由 X 的分布函数 $F_X(x)$ 表示以上概率, 得到关于 y 的表达式 $F_Y(y)$

5° 求导得 $f_Y(y) = dF_Y(y)/dy$

只需将其中的函数由一元换成二元即可

(一) $Z=X+Y$



已知随机变量 (X, Y) 概率密度函数为 $f(x, y)$, 求 $f_Z(z)$

解: $F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$

确定积分区域和由函数 $g(x, y)$ 确定的 z 的取值范围, 在本题中 z 取值未受 g 的限制, 所以 $= P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$

积分区间是图中阴影部分区域

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx dy$$

固定 z 和 y , 对积分 $\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx$ 做变量代换, 令 $x = u - y$, 则 $dx = du$, u 的积分区间为 $-\infty$ 到 z

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z f(u - y, y) du dy = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u - y, y) dy \right] du$$

$$\text{因此 } f_Z(z) = dF_Z(z)/dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy,$$

$$\text{由对称性, 也有 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx$$

当两个随机变量独立时:

设 X 和 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$

则前式分别化为 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

称为卷积公式, 记为 $f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$

例 1: 正态随机变量的线性组合问题

设 X 和 Y 相互独立, 都服从 $N(0, 1)$ 标准正态分布, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

PPT

解: X 和 Y 独立, 且 $Z=X+Y$ 由卷积公式有:

$$f_Z(z) = f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+x-\frac{z^2}{2}} dx$$

$$-x^2+x-\frac{z^2}{2} = -\left[\left(\frac{x-z}{2}\right)^2 + \frac{z^2}{4}\right] \quad = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z/2)^2} dx$$

$$\text{令 } t=(x-z)/2, \quad = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}} \quad -\infty < z < \infty$$

所以 $Z \sim N(0, 2) = N(0+0, 1+1) = N(0, (\sqrt{2})^2)$

可以证明:

1° m 个标准正态分布的随机变量之和(Z)的分布仍然服从正态分布 $Z \sim N(0, m)$

2° 一般, 如果 X 和 Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则有

$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

3° 以上结论推广到 n 个相互独立的正态随机变量之和也成立

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i=1, \dots, n,$$

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

4° 更一般的**有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布**

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \sim N(a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n, (a_1 \sigma_1)^2 + (a_2 \sigma_2)^2 + \dots + (a_n \sigma_n)^2)$$

例 2: 在一简单电路中, 两电阻 R_1 和 R_2 串联, 设 R_1 和 R_2 相互独立, 它们的概率密

$$\text{度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{求总电阻 } R = R_1 + R_2 \text{ 的概率密度}$$

$$\text{易知 } f_R(z) = f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

1, 函数 g 为线性变换, 不限制 z 的取值

2, 求解被积函数不为 0 时的 x 的取值范围: 注意谁是自变量

由 $f_X(x)$ 得 $0 < x < 10$ 再由 $f_Y(y)$ 得 $0 < z-x < 10$, 联立式得 x 得取值范围为

$$0 < x < 10$$

$$z-10 < x < z$$

3, 这样为合并两式必须对 z 的取值进行讨论, 可借助数轴

当 $z < 0$ 或 $z > 20$ 时, 无交集, $f_R(z) = 0$

$$\text{当 } 0 < z < 10, \text{ 有 } 0 < x < z, \quad f_R(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

当 $10 < z < 20$, 有 $z-10 < x < 10$, $f_R(z) = \int_{z-10}^{10} f_X(x) f_Y(z-x) dx$

$$4, \text{ 合并以上结果得 } f_R(z) = \begin{cases} \frac{600z - 60z^2 + z^3}{15000}, & 0 \leq z < 10 \\ \frac{(20-z)^3}{15000}, & 10 \leq z < 20 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 3:

本例不准备讲解, 要求课后掌握本例, 只介绍一个重要的概念 Γ 函数

$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, $s > 0$, 这是一个广义积分, 不可积

重要的性质 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, 余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin s\pi$

当 $0 < s < 1$ 时, $\Gamma(s)$ 的值可查表求得,

Γ 分布: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

Γ 分布的可加性: $X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$, X 和 Y 相互独立

则 $Z = X+Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$

(二) $Z=Y/X$ 的分布、 $Z=XY$ 的分布

设 (X, Y) 概率密度函数为 $f(x, y)$, 则 $Z=Y/X$ 、 $Z=XY$ 仍为连续型随机变量, 其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx, \quad f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx$$

又若 X 和 Y 独立, 则 $f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx$,

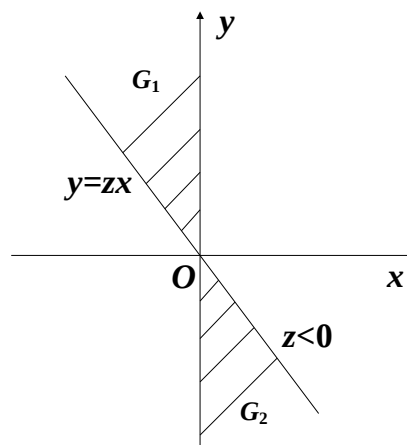
$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x}) dx$$

证: $Z=Y/X$ 的分布函数如图

$$F_{Y/X}(z) = P\{Y/X \leq z\} = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x, y) dx dy$$

$$= \iint_{y/x \leq z, x < 0} f(x, y) dy dx + \iint_{y/x \leq z, x > 0} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 \left[\int_{zx}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx + \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{zx} f(x, y) dy \right] dx$$



$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\text{令 } y = xu}} \quad \int_{-\infty}^0 \left[\int_z^{-\infty} xf(x, xu)du \right] dx \\ & \quad + \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^z xf(x, xu)du \right] dx \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^z |x| f(x, xu)du \right] dx = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xu)dx \right] du \end{aligned}$$

由概率的定义式即得结果。

$f_{XY}(z)$ 可类似求出。

(三) $M=\max\{X,Y\}$ 及 $N=\min\{X,Y\}$ 的分布

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$

求解 M 和 N 的分布

对于 M 的分布：

$F_{\max}(m)=P\{M \leq m\}$ 由最大值特点 $M \leq m$ 等价于 X 和 Y 都不大于 m

所以 $F_{\max}(m)=P\{M \leq m\}=P\{X \leq m, Y \leq m\}$

而 X 和 Y 相互独立 $=P\{X \leq m\}P\{Y \leq m\}$
 $=F_X(m)F_Y(m)$

即 $F_{\max}(m)=F_X(m)F_Y(m)$

类似的对于 N 的分布：

$F_{\min}(n)=P\{N \leq n\}=1-P\{N > n\}$ 最小值大于 n 等价于随机变量 X 和 Y 都大于 n
 $=1-P\{X > n, Y > n\}=1-P\{X > n\}P\{Y > n\}$
 $=1-[1-F_X(n)][1-F_Y(n)]$

即 $F_{\min}(n)=1-[1-F_X(n)][1-F_Y(n)]$

推广到 n 个变量的最值分布：

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$ ， $i=1, 2, \dots$

则 $M=\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 及 $N=\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数分别为

$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$

$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$

若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 个**相互独立且同分布**的随机变量，具有相同的分布函数 $F(x)$

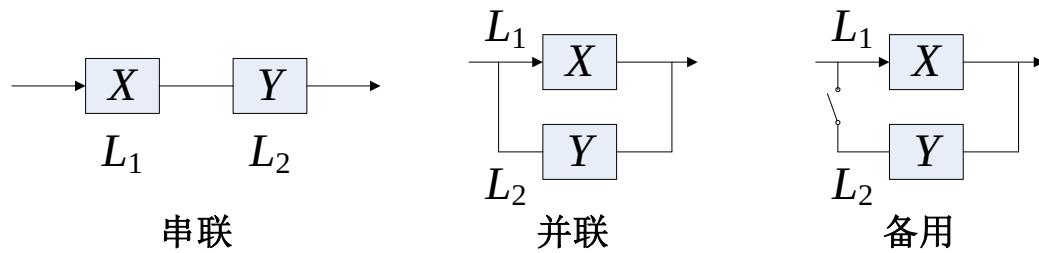
$F_{\max}(z)=[F(z)]^n$

$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n$

例 4： 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成，联接方式分别为(i)串联(ii)并联(iii)备用，设 L_1, L_2 的寿命分别为 X 和 Y ，概率密度如下：

$$f_X(x)=\begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \alpha, \beta \text{ 均大于 } 0, \text{ 且不相等.}$$

PPT



试分别就以上三种方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度

解：(i)串联：有一个损坏就停止工作

$$Z = \min(X, Y)$$

由于 X 和 Y 工作独立，

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

$$\text{而 } F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

刚好 $z > 0$ 时两个函数非 0

$$F_{\min}(z) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \text{所以 } f_{\min}(z) = dF_{\min}(z)/dz = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(ii)并联：当且仅当两个都损坏时系统才停止工作

$$Z = \max(X, Y),$$

刚好 $z > 0$ 时两个函数非 0

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$\text{所以 } f_{\min}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(iii)备用： L_1 损坏后 L_2 才开始工作，因此

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

显然有 $x > 0$, 及 $z - x > 0$, 当 $z > 0$ 时，积分限为 $0 < x < z$

$$= \begin{cases} \int_0^z \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta(z-x)} dx, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \alpha \beta e^{-\beta z} \int_0^z e^{-(\alpha-\beta)x} dx, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\alpha \beta}{\alpha - \beta} [e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}], & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例：瑞利分布：通信中信号包络值受噪声和多经等效应的影响产生衰落，其衰落呈现瑞利分布规律。

设 X, Y 相互独立的随机变量，X 和 Y 都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ，试验证随机变量 Z

$= \sqrt{X^2 + Y^2}$ 具有概率密度

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 称 } Z \text{ 服从参数为 } \sigma > 0 \text{ 的瑞利(Rayleigh)分布}$$

$$1^\circ \quad F_z(z) = P\{Z \leq z\}$$

由 $z = g(x, y)$, 得到 $z \geq 0$ 。因此当 $z < 0$ 时 $F_z(z) = 0$

当 $z \geq 0$ 时

$$2^\circ \quad F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z\} = P\{(X, Y) \in G\}$$

这是二维随机变量 (X, Y) 落在区域 $G: \sqrt{X^2 + Y^2} \leq z$ 中的概率

为此

3° 先求二维随机变量的联合概率密度, 由于 X 和 Y 相互独立

$$\text{立即有 } f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

$$\text{这样 } P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z\} = P\{(X, Y) \in G\} = \iint_{G: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z} f(x, y) dx dy$$

基于积分区域和 $f(x, y)$ 的函数特点, 采用极坐标系求解

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $0 < \theta \leq 2\pi, dx dy = r dr d\theta$ 代入

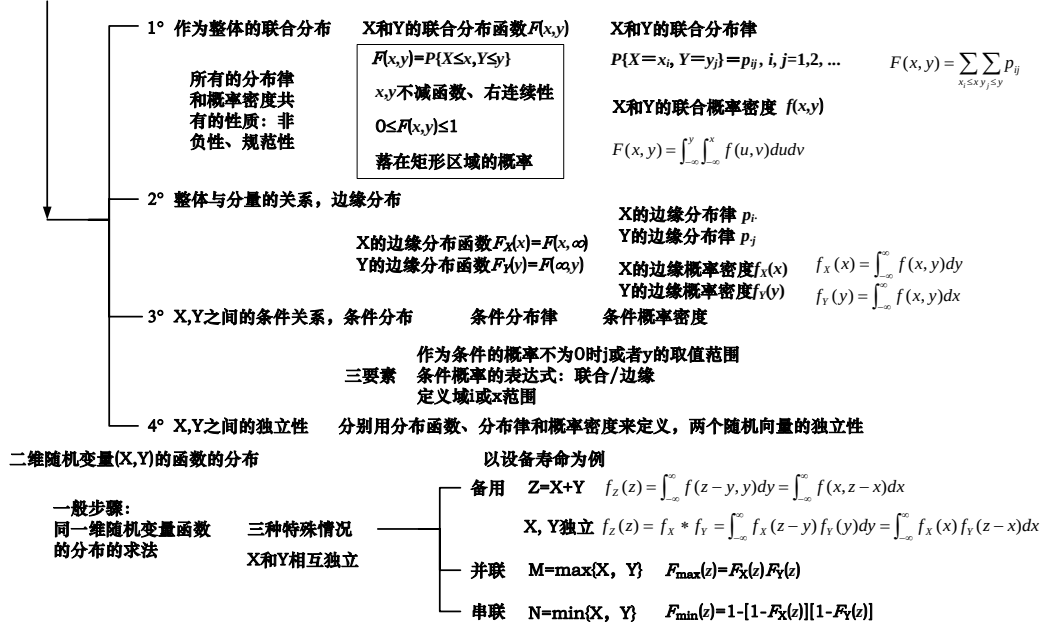
$$\text{得} = \iint_{G: r \leq z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr = 2\pi \times \frac{-1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^z = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$4^\circ \quad \text{求导得 } f_z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 本章小结(30 分钟)

二维随机变量 (X,Y) : $X=X\{e\}$, $Y=Y\{e\}$. X 和 Y 之间存在相互关系

二维随机变量 (X,Y) 的分布主要讨论四种关系



课后作业

P87: 24,25,26,29,31,32,34,35,36; 数值实验作业、其它要求

课后小结

以下几个方面应该着重强调:

1. 两个随机变量线性组合、多个随机变量的最大值及最小值的求解。