

《线性代数》第四章 向量组的线性相关性 测试试卷（一）

姓名_____学号_____得分_____

一、选择题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 设矩阵 A, B, C 满足 $A=BC$ ，则下列说法正确的是（ ）
A. A 的列向量组一定不能由 C 的列向量组线性表示
B. A 的行向量组一定能由 B 的行向量组线性表示
C. A 的列向量组一定能由 B 的列向量组线性表示
D. A 的列向量组一定能由 C 的列向量组线性表示
2. 已知 $s > 1$ ，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，则下列判断中正确的一项是（ ）
A. 在由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 构成的矩阵中有一个 s 阶子式不等于零
B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩小于 s
C. α_1 可以由 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示
D. α_s 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表示
3. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，在下列向量组中，也线性无关的向量组是（ ）
A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
B. $3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3$
C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$
D. $\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
4. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $k =$ （ ）
A. -2
B. 1
C. -1
D. 0
5. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，则（ ）不是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中的最大线性无关组的是（ ）
A. α_1, α_2
B. α_1, α_3
C. α_2, α_3
D. α_1, α_4

6. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 α 在 $\mathbf{R}^3$ 的基 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 下的坐标是

()

A. 0, -1, -1 B. 0, 1, 2 C. 1, 1, 0 D. 0, -1, 1

7. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 则向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示的充分必要条件是

()

A. $Ax = 0$ 有解 B. $Ax = \beta$ 无解 C. $Ax = \beta$ 有解 D. 无法判断

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 Ab, b 线性相关, 则 $x =$ ()

A. 2 B. -1 C. 2 D. 1

9. 设向量组 $\alpha_1 = (a, 0, c)^T$, $\alpha_2 = (b, c, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, a, b)^T$, 若常数 a, b, c 满足 $abc = 0$,

则该向量组的秩 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$ ()

A. 无法确定 B. >3 C. $=3$ D. <3

10. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_4 = (1, 2, 3)^T$ 所生成的向量空间是 ()

A. R^2 B. R^3 C. R D. R^4

11. 设非空集合, $V_1 = \{x = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R\}$, $V_2 = \{x = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R\}$,

$V_3 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$,

$V_4 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ 中构成向量空间的是 ()

A. V_1, V_4 B. V_1, V_3 C. V_2, V_3 D. V_1, V_2

12. 设 α_1, α_2 是三元线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 且 $R(A) = 2$, 则 $Ax = b$ 的通解为 ()

A. $k_1 \alpha_1 + k_2 (\alpha_1 - \alpha_2)$ B. $k (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2)$

C. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$

D. $k_1\alpha_2 + k_2(\alpha_2 - \alpha_1)$

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, 则 β 能由向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示吗? _____.

2. 求向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的一个最大线性无关组_____.

3. 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性相关性为_____.

4. 设向量组 $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 求 a, b 的值_____.

5. 设 η_1, η_2, η_3 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个互不相同的解, $R(A)=3$, 若

$\eta_1 + \eta_3 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 则该方程组的通解为_____.

6. 当 $\lambda =$ _____ 时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 有无穷多解.

三、简答题（共 40 分）

1. 已知 R^3 的两个基为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ 及 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ 求 (1) 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P ;

(2) 求 x 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标. (10 分)

2. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3+a \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4+a \end{pmatrix}$, 问 a 为何值

时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时求一个最大线性无关组, 并将其余向量用该最大线性无关组线性表示. (10 分)

3. 求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$
 的通解. (10 分)

4. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, 已知它的三个解向量为 η_1, η_2, η_3 , 其中 $\eta_1 = (3, -4, 1, 2)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (4, 6, 8, 0)^T$, 求 $Ax = \beta$ 的通解. (10 分)