

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____ 所在单位_____

授课班级_____ 专业_____ 撰写时间_____

教案编号	04-0201	教案内容	2.1 随机变量 2.2 离散型随机变量及其分布律	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 理解随机变量的概念，会用随机变量表示随机事件； (2) 理解离散型随机变量及其概率分布的概念，会求离散型随机变量的分布律，能表述常见的离散型随机变量的分布律：两点分布、二项分布及泊松分布；			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性；			
教学重点	随机变量的概念；离散型随机变量及其分布律（分布列）的概念；				
教学难点	离散型随机变量的分布律的求解				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述(10 分钟) 随机变量的引入： 为全面研究随机试验的结果，揭示随机现象的统计规律性，需将随机试验的结果数量化，即把随机试验的结果与实数对应起来. 1. 在有些随机试验中，试验的结果本身就由数量来表示. 2. 在另一些随机试验中，试验结果看起来与数量无关, 但可以指定一个数量来表示之. 第二部分：随机变量的概念（35 分钟） 一、随机变量的定义： 设随机试验的样本空间为 $S = X(e)$，称定义在样本空间 S 上的实值单值函数 $X = X(e)$ 为随机变量.					板书， 回顾第一章随机事件的概率定义 PPT

二、随机变量与数学分析中函数的比较：

(1) 都是实值函数,但前者在试验前只知道它可能取值的范围,而不能预先肯定它将取哪个值;

(2) 试验结果的出现有一定的概率,故前者取每个值和每个确定范围内的值也有一定的概率.

三、引入随机变量的意义

随机变量的引入,使得随机试验中的各种事件可通过随机变量的关系式表达出来.由此可见,随机事件这个概念实际上是包容在随机变量这个更广的概念内.也可以说,随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则以动态的观点来研究之.其关系类似高等数学中常量与变量的关系. 随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件. 引入随机变量后,对随机现象统计规律的研究,就由对事件及事件概率的研究转化为随机变量及其取值规律的研究,使人们可利用数学分析的方法对随机试验的结果进行广泛而深入的研究.

随机变量因其取值方式不同,通常分为离散型和非离散型两类.而非非离散型随机变量中最重要的是连续型随机变量.今后,我们主要讨论离散型随机变量和连续型随机变量.

四、例题：

例 1 在抛掷一枚硬币进行打赌时,若规定出现正面时抛掷者赢 1 元钱,出现反面时输 1 元钱,则其样本空间为 $S = \{\text{正面}, \text{反面}\}$,记赢钱数为随机变量 X ,则 X 作为样本空间 S 的实值函数定义为:

$$X(e) = \begin{cases} 1, & e = \text{正面}, \\ -1, & e = \text{反面}. \end{cases}$$

例 2 在将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H 、反面 T 出现情况的试验中,其样本空间

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\};$$

记每次试验出现正面 H 的总次数为随机变量 X ,那么, X 的可能取值为 $\{0,1,2,3\}$.则 X 作为样本空间 S 上的函数定义为:

$$X = \begin{cases} 3 & \{HHH\} \\ 2 & \{HHT, HTH, THH\} \\ 1 & \{HTT, THT, TTH\} \\ 0 & \{TTT\} \end{cases}$$

例 3 在测试灯泡寿命的试验中,每一个灯泡的实际使用寿命可能是 $[0, +\infty)$ 中任何一个实数,若用 X 表示灯泡的寿命(小时),则 X 是定义在样本空间 $S = \{t | t \geq 0\}$ 上的函数,即 $X = X(t) = t$, 是随机变量.

PPT

强调随机变量的定义域是样本空间,取值为单值实数,板书讲解启发

板书

强调离散型随机变量的实例应用

第三部分：离散型随机变量及其分布函数（40 分钟）

一、离散型随机变量及概率分布律的定义：

1. 离散型随机变量的定义：

若随机变量 X 的全部可能取值为有限个或可列无穷多个，则称随机变量 X 为离散型随机变量。

2. 离散型随机变量概率分布律的定义：

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_i (i=1,2,\dots)$ ，称 $P\{X = x_i\} = p_i, i=1,2,\dots$

为 X 的**概率分布**或**分布律**。

常用表格形式来表示 X 的概率分布：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

3. 例 在将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H 、反面 T 出现情况的试验中，其样本空间 $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ ；记每次试验出现正面 H 的总次数为随机变量 X ，那么， X 的可能取值为 $\{0,1,2,3\}$. 则 X 作为样本空间 S 上的函数定义为：

$$X = \begin{cases} 3 & \{HHH\} \\ 2 & \{HHT, HTH, THH\} \\ 1 & \{HTT, THT, TTH\} \\ 0 & \{TTT\} \end{cases}$$

$$P\{X = 0\} = \frac{1}{8}, \quad P\{X = 1\} = \frac{3}{8}, \quad P\{X = 2\} = \frac{3}{8}, \quad P\{X = 3\} = \frac{1}{8},$$

X	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

概率密度函数的性质：

1° 非负性： $p(x_i) \geq 0$ ；

2° 规范性： $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

例 1 一汽车在开往目的地的道路上需要经过四组信号灯的的概率题设一汽车在开往目的地的道路上需经过四组信号灯，这组信号灯以 p 的概率允许或者禁止汽车通过. 以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的组数（设各组信号灯的工作是相互独立的），求 X 的分布律？

强调离散型随机变量的分布律定义

求解过程板书

PPT

二、常见离散型随机变量的概率分布律：

1. 两点分布

如果 X 的分布律为： $P(X=x)p^x(1-p)^{1-x}$ ， $x=0,1$.

概率分布列为：

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称 X 服从**两点分布（或0—1分布）**。记作： $X \sim b(1, p)$ 。

2. 二项分布

若 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (k=0,1,2,\dots, n)$$

其中 $0 < p < 1, p+q=1$ ，则称 X 服从参数为 n, p 的**二项分布**。记作： $X \sim b(n, p)$ 。

特别，当 $n=1$ 时，二项分布为 $P\{X=k\}=p^k q^{1-k}$ ($k=0, 1$) 就化为 0—1 分布。可见 0—1 分布是二项分布的特殊情形。

显然： $\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1$ ，其中： $\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 恰是二项式 $[p+(1-p)]^n$ 的展开式中的第 $k+1$ 项。且 X 描述的是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数 X 的分布。

例 2 按规定，某种型号的电子元件的使用寿命超过 1500 小时的为一级品。已知某一大批该产品的一级品率为 0.2，现从中随机抽取 20 只，问 20 只样品中恰有 k 只为一级品的概率是多少？

例 3 某人进行射击，设每次射击的命中率为 0.02，独立射击 400 次，试求至少击中两次的概率。

例 4 设有 80 台同类型设备各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01，且一台设备的故障能由一个人处理，考虑两种配备维修工人的方法，其一是由 4 人维护，每人负责 20 台；其二是由 3 人共同维护 80 台，试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率大小。

3. 泊松分布 （1837 年法国数学家泊松（1781-1840）提出）

若随机变量 X 的分布列为：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k=0,1,2,3,\dots)$$

则称 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**。 $X \sim P(\lambda)$ ，或 $X \sim \pi(\lambda)$ 。

重点讲解离散型随机变量的分布律

强调几类常用离散型随机变量的分布律定义

提问结合启发

显然：① $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} > 0$, ② $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$.

二项分布的泊松近似

定理 2.4.1 (泊松定理) 在 n 重贝努利试验中, 记事件 A 在一次试验中发生的概率为 p_n (与试验次数 n 有关), 若当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $np_n \rightarrow \lambda$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

(证明略)

泊松定理是在 $np_n \rightarrow \lambda$ 条件下获得的故在计算二项分布 $b(n, p)$ 时, 当 $n \rightarrow +\infty$, $p \rightarrow 0$, 而 $\lambda = np$ 适中时, 可用泊松分布作近似.

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.5)$$

且 n 越大, p 越小, 近似程度越高.

例 5 计算机硬件公司制造某种特殊型号的微型芯片, 次品率达 0.1%, 各芯片成为次品相对独立, 求在 1000 只产品中至少有 2 只次品的概率. 以 X 记产品中的次品数, $X \sim b(1000, 0.001)$.

第四部分：总结离散型的概率分布率(5 分钟)

一、设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_i (i=1, 2, \dots)$, 称 $P\{X = x_i\} = p_i, i=1, 2, \dots$ 为 X 的**概率分布**或**分布律**.

常用表格形式来表示 X 的概率分布:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

二、泊松分布 (1837 年法国数学家泊松 (1781-1840) 提出)

若随机变量 X 的分布列为:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布. $X \sim P(\lambda)$, 或 $X \sim \pi(\lambda)$.

板书

PPT

课后作业

P55: 1, 2, 3;

课后小结

以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解
1. 随机变量的定义

- | | |
|--|---|
| | <ol style="list-style-type: none">2. 离散型随机变量的分布律如何确定3. 泊松定理的证明 |
|--|---|

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____ 所在单位_____

授课班级_____ 专业_____ 撰写时间_____

教案编号	05-0202	教案内容	2.3 随机变量的分布函数 2.4 连续型随机变量及其概率密度	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 熟练掌握随机变量分布函数的概念和性质，会求随机变量的分布函数； (2) 理解连续型随机变量的概率密度函数的概念及性质，会用连续型随机变量的概率密度函数计算某些随机事件的概率。			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性；			
教学重点	分布函数的概念；连续型随机变量及其概率密度的概念；				
教学难点	概率密度与分布函数的关系，分布函数与密度函数的性质				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述(10 分钟) 上一次课我们学习了离散型随机变量的分布律问题,但对于 非离散型随机变量 x ,由于其 可能取值不能一个一个的列举 而无法用分布律来描述 另外，所遇到的 非离散型随机变量通常取任一指定的实数值的概率都等于 0 ，下一节具体学习。这也就是第一章提到的概率为 0 的事件不一定为空集的情况 实际问题中有很多此类变量：误差 ε ，元件寿命 T 等。 对于此类问题， 主要研究随机变量取值落在某一个区间的概率 ，即： $P\{x_1<X\leq x_2\}=P\{X\leq x_2\}-P\{X\leq x_1\}$ 物理意义 问题变为计算 $P\{X\leq x_2\}$ 及 $P\{X\leq x_1\}$ ，于是引入分布函数的概念。					板书， 回顾分布率的定义， 以及三种重要离散型随机变量的分布率 PPT
第二部分：随机变量的分布函数（35 分钟） 分布函数定义： 设 X 是一个随机变量， x 是任意实数，函数					

$$F(x)=P\{X\leq x\}, -\infty<x<\infty$$

称为 X 的分布函数。

左开右闭区间上的概率:

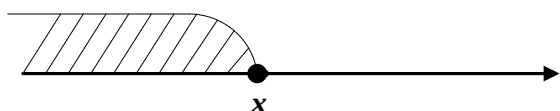
对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$\therefore$ 已知分布函数, 就可以计算出 x 落在任意区间 $(x_1, x_2]$ 上的概率, **分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性。**

分布函数的物理意义:

将 X 看成是数轴上的随机点的坐标, 那么, 分布函数 $F(x)$ 在 x 处的函数值就表示 X 落在 $(-\infty, x]$ 上的概率。



分布函数具有以下基本性质

1° $F(x)$ 是一个不减函数

对任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有 $F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$

$$2^\circ 0 \leq F(x) \leq 1 \text{ 且 } F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

仅从物理意义上加以说明: 当 x 趋于 $-\infty$ 时, 即区间端点沿 x 轴无限左移, $\{X < x\}$ 逐渐趋于 **不可能事件**, 从而其概率趋于 0, 即有 $F(-\infty) = 0$; 反之, 若点 x 无限右移, 则 $\{X < x\}$ 趋于 **必然事件**, 从而概率趋于 1, 即有 $F(\infty) = 1$

3° $F(x+0) = F(x)$ 即 $F(x)$ 为右连续的

$F(x)$ 在点 x 处的右极限等于点 x 处的函数值, 即 $F(x)$ 是右连续的。

例 1: 随机变量的分布律用分布函数来表示

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	1/4	1/2	1/4

求 X 的分布函数, 并求 $P\{X \leq 1/2\}$, $P\{3/2 < X \leq 5/2\}$, $P\{2 \leq X \leq 3\}$

解: 随机变量落在 -1, 2, 3 三个点上的概率为非 0, 落在其它点上为不可能事件, 因此有

PPT

PPT

强调分布函数是一个概率函数, 满足这 3 个性质的函数必为某一随机变量的分布函数
板书讲解
启发

$$\begin{cases} P\{X < -1\} = 0 \\ P\{X = -1\} = 1/4 \\ P\{-1 < X < 2\} = 0 \text{ 由概率的有限可加性} \\ P\{X = 2\} = 1/2 \\ P\{2 < X < 3\} = 0 \\ P\{X = 3\} = 1/4 \\ P\{X > 3\} = 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ P\{X = -1\}, & -1 \leq x < 2 \\ P\{X = -1\} + P\{X = 2\}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

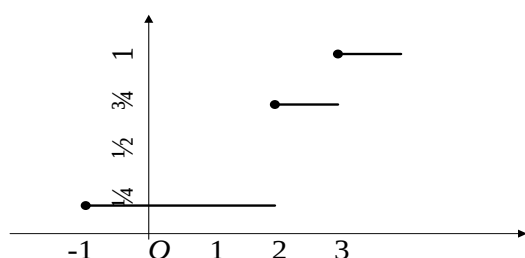
$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/4, & -1 \leq x < 2 \\ 1/4 + 1/2, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

※ 1° 概率函数与普通的代数函数不同之处在于物理意义不同，前者自变量是随机变量 X 的取值落在 $(-\infty, x]$ 区间上的概率

※ 2° 求分布函数，一定要讨论区间 $(-\infty, \infty)$ 上的所有情况

※ 3° $F(x)$ 的值即为所有 $\leq x$ 的 X 取值中落在 x_k 处的概率 p_k 之和

※ 4° $F(x)$ 的图形是一条阶梯形曲线，在 $x = -1, 2, 3$ 处有阶跃点，阶跃值分别为 $1/4, 1/2, 1/4$



※ 在阶跃点处，下面是空心，上面是实心，体现右连续性

$$P\{X \leq 1/2\} = F(1/2) = 1/4$$

$$P\{3/2 < X \leq 5/2\} = F(5/2) - F(3/2) = 3/4 - 1/4 = 1/2$$

$$P\{2 \leq X \leq 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\} = 1 - 3/4 + 1/2 = 3/4 \text{ 注意区间左端的等号}$$

分布律用分布函数表示的一般方法：

一般的，设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

由概率的可列可加性得 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\}$$

$$\text{即 } F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

这里和式是对所有满足 $x_k \leq x$ 的 k 求和的，分布函数在点 $x = x_k$ ($k = 1, 2, \dots$) 处有跳跃，其跳跃值为 $p_k = P\{X = x_k\}$

启发

板书

强调离散型随机变量分布函数右连续在图形上的特点

例 2 一般随机变量的分布函数的求解方法

一个靶子是半径 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该同心圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离，试求随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

解：分段讨论：

1° 当 $x < 0$ 时， $\{X \leq x\}$ 是不可能事件， $F(x) = 0$

2° 在圆盘上， $0 \leq x \leq 2$ ，由题意， $P\{0 \leq X \leq x\} = k\pi x^2$

当 $x = 2$ 时由于假定每次射击都能中靶，有 $P\{0 \leq X \leq 2\} = 1$

$$\therefore 1 = k\pi 2^2$$

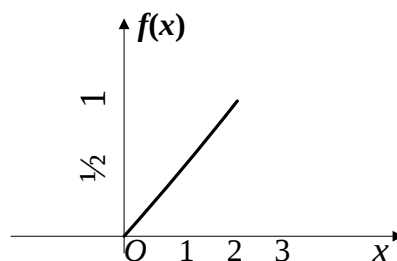
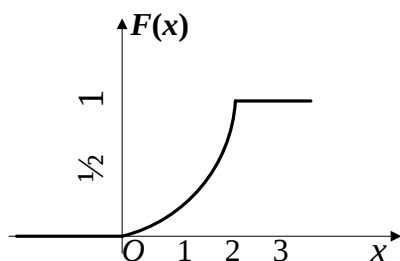
即 $k\pi = 1/4$ 代入得 $F(x) = P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\} = 0 + (1/4)x^2 = (1/4)x^2$

3° 当 $x > 2$ 时，由题意 $\{X \leq x\}$ 是必然事件， $F(x) = 1$ 。

综上， $F(x)$ 是一个分段函数，具体为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

它的图形是一条连续曲线



※注意区间端点的取值

※注意对 x 的讨论一定要全，在 $(-\infty, \infty)$ 上都要考虑

※注意 x 是值， X 是随机变量

现在对 $F(x)$ 求导数（不可导的点的导数设为 0）

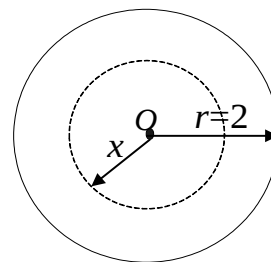
$$\text{有 } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

这样有 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ ，即 $F(x)$ 是非负函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, x]$ 上的积分， $f(t)$ 即为下

一节要学习的概率密度函数，其中 X 是连续型。

第三部分：连续型随机变量及概率密度的定义（40 分钟）

求解过
程板书



连续型随机变量及概率密度 定义：由例 2

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ ，存在非负函数 $f(x)$ ，使对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

则称 X 为**连续型随机变量**，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的**概率密度函数**，简称**概率密度**

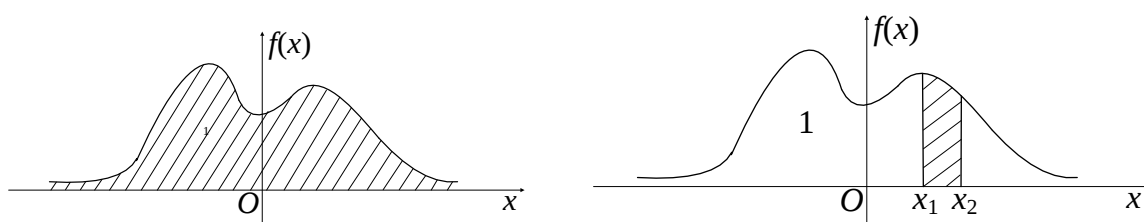
※由数学分析的知识，**连续型随机变量的分布函数是连续函数**

※在实际应用中遇到的基本上是离散和连续型随机变量

概率密度函数的性质：

1° 非负性： $f(x) \geq 0$. 由定义可知

2° 规范性： $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) = 1$



曲线 $y=f(x)$ 与 O_x 轴之间的面积等于 1

3° 对任意实数 x_1, x_2 ($x_1 \leq x_2$)，有 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

概率 $P\{x_1 < X \leq x_2\}$ 等于区间 $(x_1, x_2]$ 上曲线 $y=f(x)$ 之下的曲边梯形的面积

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处**连续**，则有 $F(x)' = f(x)$

（比右连续强，一般的是右连续）

a) 线密度定义：

由连续性定义，在连续点 x 处有

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

这正好与物理学中的线密度的定义类似：随机点落在单位区间上概率的大小

当 Δx 充分小时，点 x 处的曲边梯形可近似为长 Δx 高 $f(x)$ 的矩形。

即 $P\{x < X \leq x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$ ，随机变量 X 落在 $(x, x + \Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$ ，忽略了高阶无穷小。

b) 对于连续型随机变量，单点概率为 0

即若 X 为连续型随机变量，对任意的实数 a ，有 $P\{X=a\}=0$

证：显然有包含关系 $\{X=a\} \subset \{a - \Delta x < X \leq a\}$

$$\therefore 0 \leq P\{X=a\} \leq P\{a - \Delta x < X \leq a\} = F(a) - F(a - \Delta x)$$

而 $F(x)$ 是连续的，（也满足左连续）连续型随机变量的分布函数是连续的

$\therefore$ 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时有

$$0 \leq P\{X=a\} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(a - \Delta x) - F(a)) = F(a) - F(a) = 0$$

重点讲解

强调连续型随机变量在每一点的概率均为零

启发

即 $P\{X=a\}=0$

要注意几点:

- 1° 只有当 X 为连续型时, 才一定有 $P\{X=a\}=0$, 否则不一定
- 2° 尽管 $P\{X=a\}=0$, 但 $\{X=a\}$ 不是不可能事件
- 3° 连续型随机变量中区间的端点不影响概率值, 即对以下概率不加区分

$$P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X < b\}$$

例: 由分布函数求概率密度

$$\text{设 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & 1 \leq x < e \\ 1, & x \geq e \end{cases}, \text{ 求 } f(x)$$

解: 先判断 $F(x)$ 在区间端点的连续性(是否有阶跃特性), 如果连续则直接对 $F(x)$ 进行分段求导即可, 由于连续型随机变量单点概率为 0, 不可导的点可直接取右导数即可

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & 1 \leq x < e \\ 0, & x \geq e \end{cases} = \begin{cases} 1/x, & 1 \leq x < e \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 1: 由概率密度求分布函数和概率

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ; (2) 求 $F(x)$; (3) 求 $P\{1 < X \leq 7/2\}$

解: (1) 由规范性得 $1 = \int_0^3 kx dx + \int_3^4 (2 - x/2) dx$, 解得 $k = 1/6$; (2) 由定义

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x t/6 dt, & 0 \leq x < 3 \\ \int_0^3 t/6 dt + \int_3^x (2 - t/2) dt, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/12, & 0 \leq x < 3 \\ -3 + 2x - x^2/4, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

(3) $P\{1 < X \leq 7/2\} = F(7/2) - F(1) = 41/48$

或者用性质(3)在区间 $(1, 7/2]$ 上对 $f(x)$ 积分

第四部分: 总结离散型和连续型随机变量的概率分布(5 分钟)

几种提法:

X 的概率分布: 是指分布函数

X 为连续型时: 是指概率密度

PPT

板书

板书讲解, 提问结合启发

X 为离散型时：是指分布律 设离散型 r.v.X 的概率函数是 $P\{X=x_k\} = p_k$, $k=1,2,3,\dots$ $F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\}$ 即 $F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$ F(x) 为累积概率函数 设连续型 r.v.X 的概率函数是 $f(x)$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$	板书
课后作业	P56: 10, 12, 13, 17, 21; 数值实验作业、其它要求
课后小结	以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解 1. 分布函数的意义和性质 2. 离散型和连续型随机变量的分布函数如何确定 3. 连续型随机变量的概率密度性质

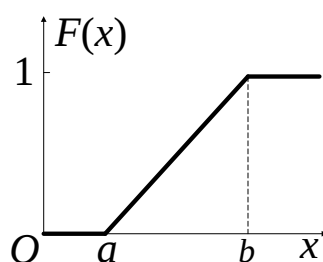
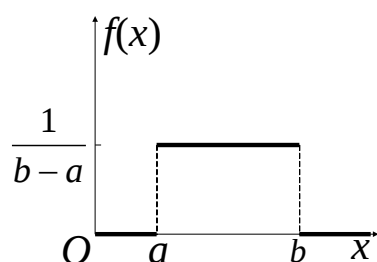
《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____ 所在单位_____

授课班级_____ 专业_____ 撰写时间_____

教案编号	06-0203	教案内容	2.4 连续型随机变量及其概率密度	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 能写出常见的连续型随机变量的概率密度函数：均匀分布、指数分布、正态分布，会求正态分布的概率； (2) 清楚正态分布上 α 分位点的含义和如何查表确定。			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性；			
教学重点	连续型随机变量常见分布：均匀分布、指数分布和正态分布的几何特征；正态分布上 α 分位点的含义和如何查表确定。				
教学难点	连续型随机变量常见分布：均匀分布、指数分布和正态分布的参数内涵。				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备注
上节课知识回顾					板 书 结 合 PPT
第一部分：均匀分布 (20 分钟)					
设连续型随机变量 X 具有概率密度					
$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$					
则称 x 在区间(a,b)上服从均匀分布.记为 $X\sim U(a, b)$ 。					
例子：电子和量子在一定能级上的运动轨迹					
概率密度的两个条件：					
非负性成立 $f(x)\geq 0$ ，且规范性： $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$					

图像:



※ **关于自变量范围:** 连续型随机变量的概率密度函数其自变量一定是在 $(-\infty, \infty)$ 上都有定义, 在有些区间虽然函数值为 0, 但是它是有意義的, 表明随机变量 X 落在这些区间的概率为 0, 或不可能事件。

※ **均匀分布的含义:** 代表一种等可能性, 即 X 落在区间 (a, b) 中任意等长度的子区间内的概率是等可能的, 或者说 X 落在区间 (a, b) 中的概率只依赖于子区间长度而与子区间位置无关。

证: 对任意长度为 l 的子区间 $(c, c+l)$, $a \leq c < c+l \leq b$, 有

$$P\{c < X < c+l\} = \int_c^{c+l} f(x) dx = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}$$

X 的分布函数:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

图像 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的积分图像

例 2: 设电阻值 R 是一个随机变量, 均匀分布在 $900\Omega \sim 1100\Omega$ 。求 R 的概率密度及 R 落在 $900\Omega \sim 1100\Omega$ 的概率。 $X \sim U(900, 1100)$

解: 首先由题意均匀分布, 得到 R 的概率密度函数为

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{1100-900}, & 900 < r < 1100 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \therefore P\{950 < R \leq 1050\} = \int_{950}^{1050} \frac{1}{200} dt = 0.5$$

第二部分: 指数分布 (25 分钟)

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 其中 $\theta > 0$ 为常数, 则称 X 服从

数为 θ 的指数分布。也叫负指数分布

概率密度的两个条件:

易知**非负性**成立 $f(x) \geq 0$, 且**规范性**: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$

X 的分布函数:

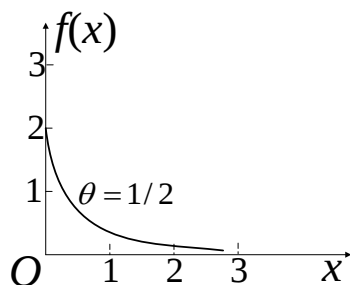
重点

板书
讲解

板书
结合
PPT

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

图像:



无记忆性:

服从指数分布的 X 有如下性质: $P\{X > s+t | X > s\} = P\{X > t\}$

证: $P\{X > s+t | X > s\} = P\{X > s+t \cap X > s\} / P\{X > s\} = P\{X > s+t\} / P\{X > s\}$

$$= [1 - F(s+t)] / [1 - F(s)]$$

$$= e^{-(s+t)/\theta} / e^{-s/\theta} = e^{-t/\theta}$$

$$= P\{X > t\}$$

板书

含义: 如果 X 是某一元件寿命, 那么已知元件使用了 s 小时, 它还能再使用 t 小时 (即 $s+t$ 小时) 的条件概率, 等于从开始使用时算起它至少能使用 t 小时的概率。即元件对它使用 s 小时没有记忆, 符合这样数学模型的随机现象有很多。

应用: 排队论, 可靠性理论

这里的 $\frac{1}{\theta} = \lambda$, 指数分布反映的是两次事件发生的时间间隔的分布形式, Poisson 分布反映的是单位时间内事件发生的次数的分布形式。第四章数学期望会更好地解释两者之间的关系。

含义
很重
要

第三部分: 正态分布 (40 分钟)

在自然界中大量的随机现象服从或近似的服从正态分布

——电子器件热噪声

——误差

——信道上的噪声等等

——大量的随机因素的综合作用的结果, 第五章将对此做进一步的学习

定义: 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为常数, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的**正态分布**或**高斯(Gauss)分布**, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

板书
结合
PPT

※注意，第二个参数是平方的形式

概率密度的两个条件：

易知非负性成立 $f(x) \geq 0$ ，

现在证：规范性： $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

令 $t = (x - \mu)/\sigma$ ，有 $dt = dx/\sigma$ ， $-\infty < t < \infty$ ，代入得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\text{记 } I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ 则 } I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+u^2}{2}} dt du$$

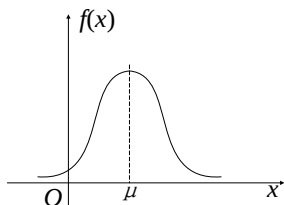
利用极坐标系将它化成累次积分， $dt du = r dr d\theta$, $0 < r = (t^2 + u^2)^{1/2} < \infty$, $0 < \theta < 2\pi$ 得

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1, \text{ 即 } I = 1$$

$$\text{于是 } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = I = 1$$

μ , σ 的含义在第四章介绍，它们分别是均值和方差的概念

图像：



正态函数的性质：函数曲线的性质

1°对称轴：曲线关于 $x = \mu$ 对称，对任意的 $h > 0$ 有

$$P\{\mu - h < X \leq \mu\} = P\{\mu < X \leq \mu + h\}$$

函数的对称性即证明，对任意的 a 有 $f(\mu - a) = f(\mu + a)$ ，略。

意义：X 落在关于 $x = \mu$ 对称的两个区间的概率相等

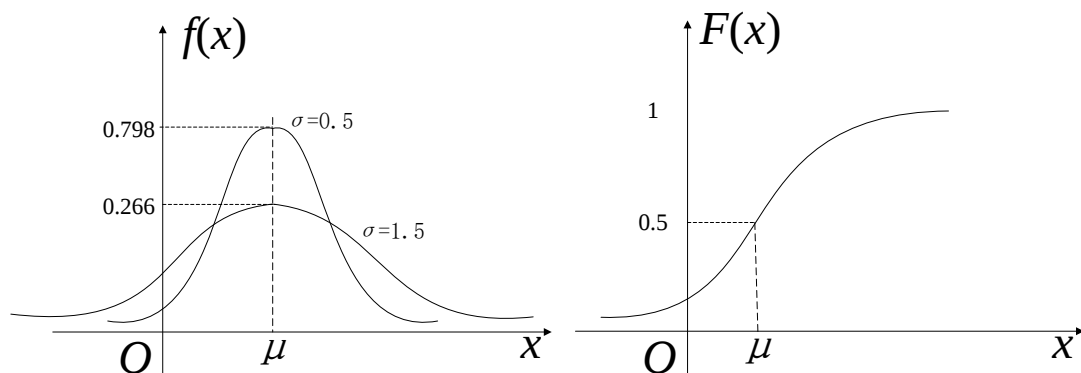
对称轴平移，曲线形状不变。曲线 $f(x)$ 的位置完全由 μ 决定， μ 称为位置参数

2°最大值：当 $x = \mu$ 时取到最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

只需令 $df(x)/dx = 0$ ，可解出 $x = \mu$ 时取得唯一极值

意义：极大值与 σ 有关， σ 越小，最值越大，X 落在对称轴附近的概率越大，x 离 μ 越远 $f(x)$ 的值越小

启
发，
提问



3°**拐点**: 上凸和下凹的分界点

在 $x=\mu\pm\sigma$ 处曲线有拐点。可由 $df(x)^2/dx=0$ 解出。

上凸部分增加得慢，下凹部分增加得快

4°**渐近线**: $y=0$ (Ox 轴) 为渐近线，无限接近但不相交

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ，可得

由以上性质可见 4 个特征基本描述了曲线的特征， $f(x)$ 的特征均由 μ, σ 决定

分布函数: 不可积

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

标准正态分布:

当 $\mu=0, \sigma=1$ 时称 X 服从标准正态分布，其概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x), \Phi(x)$ ，记做 $X \sim N(0, 1^2)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\Phi(x)$ 是超越积分，为此人们编制了一张 $\Phi(x)$ 函数表，以供查用

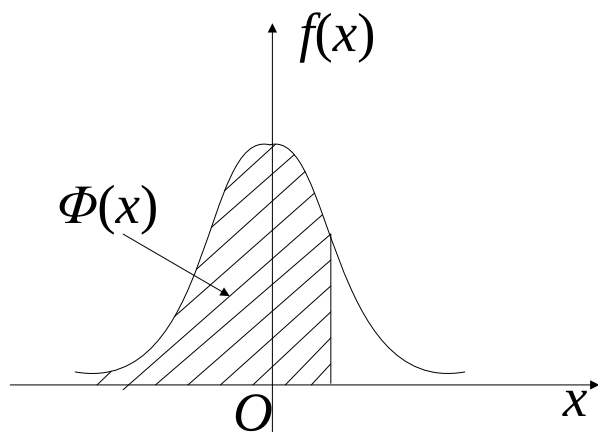
$\Phi(x)$ 的性质: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad \text{令 } t = -u, \quad \Phi(-x) = - \int_{\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

这样可以只作 $x \geq 0$ 时的一半的表格

PPT

板书



PPT

对于一般的 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，如何计算其分布函数值呢？

正态分布随机变量的标准化：线性变换

引理：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

随机变量 Z 是随机变量 X 的函数，更一般的情形留到第五节

证：先由分布函数的含义，由 X 的分布函数求随机变量 Z 的分布函数

$$F(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq z\right\} = P\{X \leq \mu + \sigma z\}$$

$$\text{由 } X \text{ 的分布函数有} \quad = \int_{-\infty}^{\mu + \sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

令 $\frac{t - \mu}{\sigma} = u$ ，则 $dt = \sigma du$ ，积分换元，而由 $t = \mu + \sigma u$ ，及 t 的范围，得出 u 的范围

$$= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(z)$$

$$\text{所以 } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

对于一般的正态分布随机变量可表示为标准正态分布的形式

于是若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则其分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

而标准正态函数可查表求值

对于任意的区间 $(x_1, x_2]$ ，有

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\left\{\frac{x_1 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

例：设 $X \sim N(1, 4)$ ，求 $P\{0 < X \leq 1.6\}$

解： $\mu = 1, \sigma = 2$

$$P\{0 < X \leq 1.6\} = \Phi((1.6 - 1)/2) - \Phi((0 - 1)/2) = \Phi(0.3) - \Phi(-0.5)$$

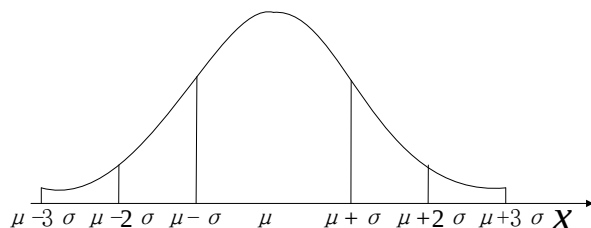
查表及由标准正态分布函数的性质 $= 0.6179 - [1 - \Phi(0.5)]$

板书

$$=0.6179-1+0.6915=0.3094$$

3σ 准则：使得正态分布函数值的表只需要做到 0 到 3.9 即可，再大都近似为 1

尽管正态变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的取值范围是 $(-\infty, \infty)$ ，但 X 落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 内几乎是肯定的。



$$1\sigma: P\{\mu-\sigma < X \leq \mu+\sigma\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6826$$

$$2\sigma: P\{\mu-2\sigma < X \leq \mu+2\sigma\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9544$$

$$3\sigma: P\{\mu-3\sigma < X \leq \mu+3\sigma\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9974$$

例 3：正态分布随机变量 $X \sim N(d, 0.5^2)$

(1) 若 $d=90$ ，求 X 小于 89 的概率

(2) 若 $X > 80$ 的概率不低于 0.99，问 d 至少为多少？

解：(1) 此时 $X \sim N(90, 0.5^2)$ ， $P\{X < 89\} = P\{(X-90)/0.5 < (89-90)/0.5\}$

$$= \Phi((89-90)/0.5) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$(2) 0.99 \leq P\{X \geq 80\} = P\{(X-d)/0.5 \geq (80-d)/0.5\} = 1 - \Phi((80-d)/0.5)$$

$$\text{即 } \Phi((80-d)/0.5) \leq 1 - 0.99 = 1 - \Phi(2.327) = \Phi(-2.327)$$

以上用了反查表：由概率值求自变量取值，且变换为大于 0.5 的概率值才可查

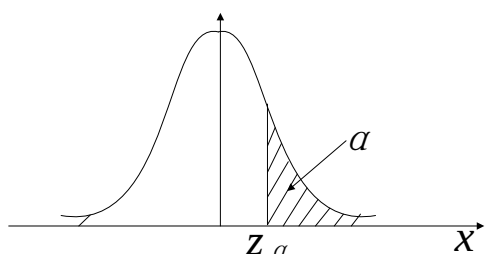
又由分布函数的不减性知

$$(80-d)/0.5 \geq -2.327, \text{ 故需 } d > 81.1635$$

关于上 α 分位点：

为了数理统计中的应用而引入

设 $X \sim N(0, 1)$ ，若 z_α 满足条件， $P\{X \geq z_\alpha\} = \alpha$ ， $0 < \alpha < 1$ ，则称点 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点。性质： $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$



详细讲解，尤其是上 α 分位点的含义

第四部分 总结三种常见连续型随机变量的分布形式（5 分钟）

			期望	方差	
连续型：概率密度	—	均匀分布 $X \sim U(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	
	—	指数分布，无记忆性	θ	θ^2	事件发生的时间间隔
	—	正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2	多种随机因素综合作用
		图象特性 表达式 标准正态分布	—	1° $X \sim N(0, 1)$, $\phi(x)$ 概率密度函数	
			—	2° 分布函数 $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$	
			—	3° $Z = (X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$	
			—	4° 3σ 准则	
			—	5° 上 α 分位点	
PPT					
课后作业		P57: 24, 26, 29 ; 数值实验作业、其它要求			
课后小结		以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解 1.三种常见连续型随机变量的分布对应的概率密度图形，以及三种分布所对应的含义及其应用背景； 2.指数分布和 Poission 分布之间的关系； 3.正态分布的分布函数查表以及上 α 分位点的含义和如何查表确定。			

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____ 所在单位_____

授课班级_____ 专业_____ 撰写时间_____

教案编号	07-0204	教案内容	2.5 随机变量的函数的分布	学时	1										
教学目标	基本要求	(1) 理解随机变量函数的概念，掌握其分布函数的基本求法。													
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性；													
教学重点	离散型随机变量函数分布的求解过程；连续型随机变量函数分布的求解过程。														
教学难点	连续型随机变量函数分布的求解过程。														
教学方法	提问、讲授、启发、讨论														
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表														
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结														
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注										
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述(2 分钟) 在上一节的引理中已经接触过相关概念：即某一个随机变量可能是另一个随机变量的函数。 在实际应用中，某些人们关心的随机变量 Y 往往不能直接测量得到，而它可能是某个能测量的随机变量的函数 X。 比如我们有时很关心圆柱轴截面的面积 S，但无法直接获得，而我们能够获得圆柱轴截面的直径 D，而随机变量 S 是随机变量 D 的函数，即 $S=(1/4)\pi D^2$ 本节就是解决怎样由已知的随机变量 X 的概率分布求它的函数 $Y=g(X)$ 的概率分布，其中 $g(\bullet)$是连续函数 我们通过例子来总结出一般的步骤					PPT										
第二部分：离散型随机变量函数的分布（10 分钟） 例 1： 设随机变量 X 具有以下的分布律，试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律 <table><tr><td>X</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p_k</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>0.1</td><td>0.4</td></tr></table> 解： 首先获得 Y 的所有可能取值：0，1，4					X	-1	0	1	2	p_k	0.2	0.3	0.1	0.4	板书讲解
X	-1	0	1	2											
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4											

求解各取值的概率

$$P\{Y=0\}=P\{(X-1)^2=0\}=P\{X=1\}=0.1$$

$$P\{Y=1\}=P\{(X-1)^2=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.7$$

$$P\{Y=4\}=P\{(X-1)^2=4\}=P\{X=-1\}=0.2$$

即得 Y 的分布律为

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

对于离散型随机变量

$P\{Y=y_k\}$ 等于所有满足 $y_k=g(X)$ 的 X 的取值的概率之和。

第三部分：连续型随机变量函数的分布（30 分钟）

例 2： 设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = f_X(x) = \begin{cases} x/8, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 求随机变量 } Y=2X+8 \text{ 的概率密度}$$

解： 分别记 X, Y 的分布函数为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$, 先求 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

$$\text{将 } Y=2X+8 \text{ 代入} \quad = P\{2X+8 \leq y\}$$

$$\text{表示为关于 X 的概率} \quad = P\{X \leq (y-8)/2\}$$

$$\text{即} \quad = F_X((y-8)/2)$$

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导得

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= dF_Y(y)/dy = dF_X((y-8)/2)/dy = f_X((y-8)/2) d((y-8)/2)/dy \\ &= \begin{cases} (1/8)[(y-8)/2](1/2), & 0 < (y-8)/2 < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} (y-8)/32, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

注意：代入时，如果 $F(x)$ 是分段函数，则 x 的取值范围用 $g^{-1}(y)$ 来代

求解连续型随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的概率密度的一般步骤：

已知 $f_X(x)$, $Y=g(X)$, 求 $f_Y(y)$

1° 先写出 Y 的分布函数定义式： $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$

由 $Y=g(X)$ 确定 Y 的值域，当 y 不在值域范围内时单独讨论

2° 将 $Y=g(X)$ 代入上式 $= P\{g(X) \leq y\}$

3° 由 $g(X) \leq y$ 求解 X 的范围 $= P\{X|g(X) \leq y\}$ 表示为 y 的形式

4° 由 X 的分布函数 $F_X(x)$ 表示以上概率，得到关于 y 的表达式 $F_Y(y)$ ，其中原自变量 x

用关于 y 的表达式来代。

5° 求导得 $f_Y(y) = dF_Y(y)/dy$

例 3： 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, 求 $Y=X^2$ 的概率密度

解： 1° $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$, 由 $Y=X^2 \geq 0$, 当 $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = 0$

板书讲
解

重点

启发

板书

2°代入 $Y=X^2$ 得 $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}$

$$3^\circ \quad =P\{-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\}$$

4°由 $F_X(x)$ 得 $F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$$5^\circ f_Y(y)=dF(y)/dy=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})], & y>0 \\ 0, & y\leq 0 \end{cases}$$

在 $Y=g(X)$, 且 $g(X)$ 为严格单调函数时的一般结果:

定理: 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, $-\infty<x<\infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$ (或 $g'(x)<0$), 则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y)=f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

板书结
合 PPT

其中 $\alpha=\min\{g(-\infty), g(\infty)\}$, $\beta=\max\{g(-\infty), g(\infty)\}$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数

证: $g'(x)>0$ 的情况

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}$$

此时 $g(x)$ 为单调增函数, 所以 $h(y)$ 也是单调增函数, 且有 y 的取值范围为

$$\alpha=g(-\infty)\leq y\leq g(\infty)=\beta,$$

因此当 $y\leq\alpha$ 时, $F_Y(y)=0$

当 $y\geq\beta$ 时, $F_Y(y)=1$

当 $\alpha\leq y\leq\beta$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}$

$$\begin{aligned} h(y) \text{ 也是单调增函数} \quad &=P\{X\leq h(y)\} \\ &=F_X(h(y)) \end{aligned}$$

$$\text{求导 } f_Y(y)=dF(y)/dy=dF_X(h(y))/dy=\begin{cases} f_X[h(y)]h'(y), & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$g'(x)<0$ 的情况, 此时 $h'(y)<0$

$$P\{g(X)\leq y\}=P\{X\geq h(y)\}=1-F_X(h(y))$$

$$f_Y(y)=dF(y)/dy=d[1-F_X(h(y))]/dy=\begin{cases} f_X[h(y)][-h'(y)], & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

两种情况合并即可得证

※ 若 $f_X(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 以外等于 0, 则只需假设在 $[a,b]$ 上恒有 $g'(x)>0$ (或 $g'(x)<0$),
 $\alpha=\min\{g(a), g(b)\}$, $\beta=\max\{g(a), g(b)\}$

例 4: 正态分布的随机变量的线性变换问题

已知随机变量 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y=aX+b(a\neq 0)$ 也服从正态分布。

证: X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

现在 $y=g(x)=ax+b$, 由这一式子解得 $x=h(y)=(y-b)/a$, 且有 $h'(y)=1/a$

显然 $g(x)$ 是严格单调的

由定理有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < y < \infty$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty < y < \infty$$

所以有

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$$

特别的当 $a=1/\sigma$, $b=-\mu/\sigma$ 时, $Y=(X-\mu)/\sigma \sim N(0, 1)$

即上一节的引理的结果

重点

第四部分：总结离散型和连续型随机变量函数的分布求解过程（3 分钟）

对于离散型随机变量, 其函数 $Y=f(X)$ 也是离散型随机变量, X 的分布率 $P\{X=x_k\}=p_k$,

PPT

$Y=f(X)$ 的分布率

$Y=f(X)$	$f(X_1)$	$f(X_1)$	...	$f(X_k)$	...
p_k	P_1	p_2	...	p_k	...

若 $f(X_k)$ 中有值相同的, 应将相应的 p_k 合并。

对于连续型随机变量, 在求 $Y=g(X)$ 的分布时, 关键的一步是把事件 $\{g(X) \leq y\}$ 转化为 X 在一定范围内取值的形式, 从而可以利用 X 的分布来求 $P\{g(X) \leq y\}$.

课后作业

P59: 32, 33, 35, 36, 37; 数值实验作业、其它要求

课后小结

以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解

1. 离散型随机变量函数分布的求解过程;
2. 连续型随机变量函数分布的求解过程。