



第二节 矩阵的秩

1. 矩阵秩的概念;
2. 矩阵秩的求法;
3. 小结.

矩阵秩的概念是由英国数学家西尔维斯特在1851年给出的，距今已一百多年了。



西尔维斯特（James Joseph Sylvester，公元1814年9月3日—公元1897年3月15日）是英国数学家。

贡献主要在代数学方面。他同凯莱一起，发展了行列式理论，创立了代数型的理论，共同奠定了关于代数不变量的理论基础。他创造了许多数学名词，当代数学中常用到的术语，如不变式、判别式、雅可比行列式等都是他引入的。他一生发表了几百篇论文，著有《椭圆函数专论》一书。



在矩阵的初等变换中，我们知道任何一个矩阵都有行阶梯形和等价标准型。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行阶梯形和等价标准型, 与今天学习的矩阵的秩之间有什么关系?

定义1 在 $m \times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 ($k \leq m$, $k \leq n$), 位于这些行列交叉处的个 k^2 元素, 不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式.

$m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \bullet C_n^k$ 个.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

A 的一阶子式，二阶子式，三阶子式有几个？为多少？

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B 的一阶子式有**20**个，二阶子式有几个？为多少？三阶子式有几个？为多少？四阶子式有几个？为多少？



如果一个矩阵的二阶子式都为零，那三阶子式如果有的话，会为零吗？

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定义2 设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 k 阶子式 D ，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那末 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.并规定零矩阵的秩等于零.

$m \times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 是 A 中不等于零的子式的最高阶数.

对于 A^T ， 显有 $R(A^T) = R(A)$.

例1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 在 A 中, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

又 $\because A$ 的 3 阶子式只有一个 $|A|$, 且 $|A| = 0$,

$\therefore R(A) = 2$.

例2 求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because B$ 是一个行阶梯形矩阵, 其非零行有 3 行,
 $\therefore B$ 的所有 4 阶子式全为零.

$$\text{而 } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \therefore R(B) = 3.$$



例3 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 求该矩阵的秩.

解 $\because \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 计算 A 的3阶子式,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \equiv 0, \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \equiv 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$= 0. \quad \therefore R(A) = 2.$$

矩阵的秩

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$$A \rightarrow (\text{初等变换}) \rightarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r



r 是标准形矩阵
非零子式的最高阶数

问题：标准形唯一吗？

$|E_r| = 1 \neq 0$ 存在 r 阶非零子式

所有比 r 高阶的子式全为零

矩阵的秩

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$$A \rightarrow (\text{初等变换}) \rightarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r

初等变换不改变
非零子式的最高
阶数



r 是 A 的非零子式
的最高阶数

标准形由 A 唯一确定

矩阵的秩

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$$A \rightarrow (\text{初等变换}) \rightarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r

给定 A , 则 A 的非零子式的最高阶数确定



标准形的非零子式的最高阶数确定



标准形由 A 唯一确定

矩阵的秩

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$$A \rightarrow (\text{初等变换}) \rightarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等变换是否
改变矩阵非零
子式的最高阶
数？

问题：标准形由 A 唯一确定

不变量

初等变换不改变矩阵非零子式的最高阶数

矩阵的秩

16

结论1：初等行变换，不改变矩阵非零子式的最高阶数

结论2：初等列变换，不改变矩阵非零子式的最高阶数

初等变换不改变矩阵非零子式的最高阶数

$$A \rightarrow (\text{初等变换}) \rightarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

标准形中所含1的个数

对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 做初等变换,

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然, 非零行的行数为2,

$$\therefore R(A) = 2.$$

此方法简单!

初等变换求矩阵秩的方法：

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，
行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩。

例4 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ，求矩阵 A 的

秩，并求 A 的一个最高阶非零子式。

解 对 A 作初等行变换，变成行阶梯形矩阵：



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ \hline r_2 - r_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ \underbrace{r_2 - r_4} \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \underbrace{r_3 - 3r_2} \\ \underbrace{r_4 - 4r_2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $R(A) = 3$.

求 A 的一个最高阶子式 .

$\because R(A) = 3$, 知 A 的最高阶非零子式为 3 阶 .

A 的 3 阶子式共有 $C_4^3 \bullet C_5^3 = 40$ 个 .

考察 A 的行阶梯形矩阵,

记 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, 则矩阵 $B = (a_1, a_2, a_4)$ 的行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \because R(B) = 3,$$

故 B 中必有 3 阶非零子式. 且共有 4 个.

计算 B 的前三行构成的子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

则这个子式便是 A 的一个最高阶非零子式.

设 n 阶可逆矩阵 A ,

$\because |A| \neq 0, \therefore A$ 的最高阶非零子式为 $|A|$,

$R(A) = n$, 故 A 的标准形为单位阵 $E, A \sim E$.

可逆矩阵的秩等于阶数, 故称可逆矩阵为满秩矩阵. 奇异矩阵为降秩矩阵.

例5 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

求矩阵 A 及矩阵 $B = (A|b)$ 的秩.

解 分析: 设 B 的行阶梯形矩阵为 $\tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{b})$,

则 $\tilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵,

故从 $\tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{b})$ 中可同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

1. 矩阵秩的概念

2. 求矩阵秩的方法

(1) 利用定义

(即寻找矩阵中非零子式的最高阶数);

(2) 初等变换法

(把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩).

小结

定义1：矩阵 A 的非零子式的最高阶数

定义2：标准形中所含1的个数