

《线性代数》模拟试卷（十九）答案

一、判断题（正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

(×) 1. 任何两个矩阵都可以相加.

(×) 2. 若矩阵 A, B, C 满足 $BA = CA$ ，而且 $A \neq O$ ，则 $B = C$.

(√) 3. 若 n 阶行列式 D 有两行元素对应成比例，则 $D = 0$.

(√) 4. 设 A 为 n 阶方阵， b 为 n 维列向量，若行列式 $|A| \neq 0$ ，则线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

(√) 5. 设 $\alpha = (1, 1)$ ， $\beta = (-2, 3)$ ，则 $\alpha\beta^T = 1$.

二、填空题（每小题3分，共15分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ 的最简形矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. 向量 $\beta = (4, 3)^T$ 由向量组 $\alpha_1 = (1, 2)^T$ ， $\alpha_2 = (2, -1)^T$ 的线性表示式为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2$

4. 已知向量 $\alpha_1 = (3, -6)^T$ 与 $\alpha_2 = (-2, a)^T$ 线性相关，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案：4

5. 可逆矩阵 A 的一个特征值为 2, 则 A^{-1} 有一个特征值为_____.

答案： $\frac{1}{2}$

三、单项选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 下列选项中不属于五阶行列式 $|a_{ij}|$ ($i, j = 1, 2, \dots, 5$) 中的一项是().

A. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}$ B. $-a_{51}a_{12}a_{43}a_{34}a_{25}$ C. $-a_{13}a_{52}a_{34}a_{21}a_{45}$ D. $a_{55}a_{44}a_{33}a_{22}a_{11}$

答案：C

2. 设线性方程组的增广矩阵为 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 若线性方程组无解, 则 λ 为().

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

答案：D

3. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, $|B| = -2$, 则 $|2AB^{-1}| =$ ().

A. 1 B. -1 C. 4 D. -4

答案：D

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩为 ().

A. 3 B. 1 C. 0 D. 2

答案：B

5. 设 $\alpha_1 = (1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1)^T$, $\alpha_4 = (0, 0)^T$, 则下列不是该向量组的极大线性无关组的是 ().

A. α_1, α_3 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_2, α_3

答案：C

6. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解的充要条件是().

A. A 的行向量组线性无关 B. A 的行向量组线性相关
C. A 的列向量组线性无关 D. A 的列向量组线性相关

答案: C

7. 假设 A, B 都是可逆矩阵, 则矩阵方程 $AXB = C$ 的解为 ().

A. $X = A^{-1}CB^{-1}$ B. $X = CA^{-1}B^{-1}$ C. $X = CB^{-1}A^{-1}$ D. $X = B^{-1}A^{-1}C$

答案: A

8. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 则 $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ 成立的充分必要条件是 ().

A. $A = E$ B. $AB = BA$ C. $B = O$ D. $A = B$

答案: B

四、计算题 (共 6 小题, 共 51 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -8 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -3 \\ -7 & -4 & 8 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= -2(-16 - 12) = 56 \quad (7 \text{ 分})$$

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ 的值. (8 分)

解: $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ (2 分)

$$= \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$
 (4 分)

$$= \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
 (5 分)

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
 (6 分)

$$= 4$$
 (7 分)

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 是否可逆若可逆求其逆矩阵. (7 分)

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 则 A 可逆. (2 分)

构造矩阵 $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$ (3 分)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

4. 求解矩阵方程 $AX = A + X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (7 分)

解: 由 $AX = A + X$ 知 $(A - E)X = A$ (1 分)

$$\text{则 } (A - E | A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \quad (7 \text{ 分})$$

$$5. \text{ 求非齐次线性方程组 } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases} \text{ 的通解. (12 分)}$$

分)

解：对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换，得

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

由于 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 < 4$, 所以该方程组有无穷多解, 取 x_3, x_4 为自由变量,

$$\text{则方程组 } \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 - 2x_4 \end{cases} \text{ 与原方程组等价}$$

令 $(x_3, x_4)^T = (0, 0)^T$ ，则原方程组的一个特解为 $\eta = (0, -1, 0, 0)^T$. (8 分)

$$\text{方程组} \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \end{cases} \text{与导出组等价}$$

分别令 $(x_3, x_4)^T = (1, 0)^T$ 和 $(x_3, x_4)^T = (0, 1)^T$ ，则导出组的基础解系为

$$\xi_1 = (-3, -1, 1, 0)^T, \quad \xi_2 = (0, -2, 0, 1)^T \quad (11 \text{ 分})$$

因此，原方程组的通解为 $x = \eta + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$ ， k_1, k_2 为任意常数. (12 分)

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

$$\text{解: } A \text{ 的特征多项式为 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 (3-\lambda)$$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ (4 分)

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时，解方程 $(A + E)x = O$. 由

$$A + E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (0, 0, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为 $k\alpha_1$ (常数 $k \neq 0$). (7 分)

当 $\lambda_3 = 3$ 时，解方程 $(A - 3E)x = O$. 由

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量为 $k\alpha_2$ (常数 $k \neq 0$) . (10 分)