

《线性代数》模拟试卷（七）答案

一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

- (×) 1. 交换行列式的两行，行列式的值不变.
- (×) 2. 设 A, B, C 为同阶方阵，则 $(A+B)C = C(A+B)$.
- (√) 3. 如果 A 为 n 阶可逆矩阵，则矩阵 A 经过有限次初等变换可化为单位矩阵.
- (√) 4. 齐次线性方程组必有解.
- (√) 5. 集合 $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in R \right\}$ 是一个向量空间.

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____.
2. 矩阵 $\begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 2 & x-1 \end{pmatrix}$ 可逆，则 x 必满足 $x \neq 3$ 且 $x \neq -1$ _____.
3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____.
4. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 的秩是 3 _____.

三、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. n 级行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} 的关系是 (D)
- A. $M_{ij} = -A_{ij}$ B. $M_{ij} = A_{ij}$ C. $M_{ij} = (-1)^n A_{ij}$ D. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
2. 设有矩阵 $A_{m \times l}, B_{l \times n}, C_{m \times n}$ ，则下列运算可行的是 (C)
- A. ABC B. $A^T CB$ C. ABC^T D. $CB^T A$

3. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 下列关系一定成立的是 (D)

A. $(AB)^2 = A^2 B^2$ B. $(AB)^T = A^T B^T$ C. $|A+B| = |A| + |B|$ D. $|AB| = |BA|$

4. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 k 必须满足 (A)

A. $k=1$ 或 $k=-1$ B. $k \neq 1$ 且 $k \neq -1$ C. $k=1$ D. $k=-1$

5. 设 n 阶方阵 A 不可逆, 有必有 (A)

A. $r(A) < n$ B. $A = 0$ C. $Ax = 0$ 只有零解 D. $r(A) = n-1$

6. 下列矩阵中是最简阶梯形的是 (D)

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 2, 5)^T$, 向量 $\beta = (2, 4, 7)^T$ 可表示为 α_1, α_2 的线性组合: $\beta = a\alpha_1 + b\alpha_2$, 则 a, b 应满足条件 (C)

A. $a=2, b=2$ B. $a=1, b=2$ C. $a=2, b=1$ D. $a=1, b=1$

8. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (-2, 2, 0)^T$, $\alpha_3 = (3, -5, 2)^T$, 下列是该向量组的极大线性无关组的是 (B)

A. α_1 B. α_1, α_2 C. α_2 D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

四、计算题 (共 50 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值. (6 分)

$$\text{解: 原式} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= 160 \quad (6 \text{ 分})$$

$$2. \text{ 设 } D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \text{ 求 } A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} \text{ 的值. } (7 \text{ 分})$$

$$\text{解: } A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad (7 \text{ 分})$$

3. 求矩阵 X , 使 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. (8 分)

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, 即 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$ (2 分)

构造矩阵 $(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{pmatrix}$ (4 分)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (5 分)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (6 分)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (7 分), 即得 $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (8 分)

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵的秩 $r(A)$ (5 分)

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ (2 分)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

则 $r(A) = 3$ (5 分)

5. 用基础解系表示如下线性方程组的全部解 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$. (14 分)

$$\text{解: } (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & \vdots & 8 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \vdots & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

即原方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4 为自由未知量. (7 分)

让自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，得方程组的一个解 $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (9 分)

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4 为自由未知量. (11 分)

对自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，即得导出组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13 \text{ 分})$$

因此所给方程组的全部解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \boldsymbol{\eta} + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数。} \end{aligned} \quad (14 \text{ 分})$$

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

解: 矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1 \text{ 分})$$

化简得 $(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$, 所以 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ 是矩阵 A 的特征值. (3 分)

当 $\lambda_1 = 4$ 时, 解齐次线性方程组 $(2E - A)\mathbf{x} = 0$

$$4E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得它的基础解系是 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以矩阵 A 对应于 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量是

$$c_1 \alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{ 为任意常数}) \quad (6 \text{ 分})$$

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 解齐次线性方程组 $(-2E - A)\mathbf{x} = 0$

$$-2\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得它的基础解系为 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ，所以矩阵 $\mathbf{A}$ 对应 $\lambda_2 = -2$ 的全部特征向量为

$$c_2 \alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{ 为任意常数}) \quad (10 \text{ 分})$$