

《线性代数》模拟试卷（二十）答案

一、判断题（正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

(×) 1. 对于任意的两个矩阵 A, B ，一定有 $AB = BA$ 。

(×) 2. 设 A 为初等矩阵，则 $A^{-1} = A$ 。

(√) 3. 交换行列式的两行行列式的值变号。

(×) 4. 任何一个线性方程组都可以用克莱默法则求解。

(√) 5. 任一含有零向量的向量组必定线性相关。

二、填空题（每小空3分，共15分）

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的最简形矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. 排列 41253 的逆序数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: 4

4. 向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$ 与 $\alpha_2 = (2, 2, 2)^T$ 线性相关还是线性无关? $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: 相关

5. 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & x \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 中元素 x 的余子式为_____.

答案: 7

三、单项选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$, 则 $x = (\quad)$.

A. 2 或 -3

B. 2 或 3

C. -2 或 3

D. -2 或 -3

答案: B

2. 设 A, B 为任意方阵, 则必有 ().

A. $AB = 0$, 则 $A = 0$ 或 $B = 0$

B. $(AB)^T = A^T B^T$

C. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

D. $A^2 + AB = 0$ 且 A 可逆, 则 $A + B = 0$

答案: D

3. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 λ 为 ().

A. 1

B. 2

C. 0

D. -1

答案: D

4. 向量 $\beta = (-1, 1, 0, 1)^T$ 由向量组 $\alpha_1 = (5, 0, 1, 2)^T$, $\alpha_2 = (4, 1, 0, 1)^T$,

$\alpha_3 = (1, 1, 1, 0)^T$ 线性表示的表示式是 ().

A. $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

B. 不能表示

C. $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$

D. $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

答案: B

5. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 3, 5)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 2)^T$ 的秩为 ().

A. 3

B. 1

C. 4

D. 2

答案: D

6. 设 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_3 = (2, 0, 2)^T$, $\alpha_4 = (3, 1, 4)^T$, 则下列不是该向量组的极大线性无关组的是 ().

- A. α_1, α_3 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_2, α_3

答案: C

7. 设 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 则下面成立的是 ().

- A. $2\eta_1 - 3\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解 B. $3\eta_1 - 2\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解
C. $\eta_1 + \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解 D. $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

答案: B

8. 设 $\lambda = 2$ 为可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于 ().

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

答案: C

四、计算题 (共 6 小题, 共 51 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= 5 \quad (7 \text{ 分})$$

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 的值. (8 分)

解: $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (2 分)

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
 (4 分)

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
 (5 分)

$$= -18 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$
 (7 分)

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 是否可逆若可逆求其逆矩阵. (7

分)

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, 则 A 可逆. (2 分)

构造矩阵 $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$ (4 分)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

4. 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. (7 分)

解: 构造矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (2 分)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -10 & 7 & -37 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -7 & 37 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

则 $X = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 37 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ (7 分)

5. 求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
 的通解. (12 分)

解：对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换，得

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

由于 $R(A) = R(\tilde{A}) = 2 < 4$, 所以该方程组有无穷多解, 取 x_2, x_4 为自由变量,

则方程组
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + x_2 \\ x_3 = \frac{1}{2} + x_4 \end{cases}$$
 与原方程组等价

令 $(x_2, x_4)^T = (0, 0)^T$ ，则原方程组的一个特解为 $\eta = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^T$. (8 分)

方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ 与导出组等价

分别令 $(x_2, x_4)^T = (1, 0)^T$ 和 $(x_2, x_4)^T = (0, 1)^T$ ，则导出组的基础解系为

$$\xi_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \xi_2 = (0, 0, 1, 1)^T \quad (11 \text{ 分})$$

因此，原方程组的通解为 $x = \eta + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$ ， k_1, k_2 为任意常数. (12 分)

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

$$\text{解: } A \text{ 的特征多项式为 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ (4 分)

当 $\lambda_1 = 1$ 时，解方程 $(A - E)x = O$. 由

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量为 $k\alpha_1$ (常数 $k \neq 0$). (6 分)

当 $\lambda_2 = 2$ 时，解方程 $(A - 2E)x = O$. 由

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的全部特征向量为 $k\alpha_2$ (常数 $k \neq 0$) . (8 分)

当 $\lambda_3 = 3$ 时, 解方程 $(A - 3E)x = O$. 由

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量为 $k\alpha_3$ (常数 $k \neq 0$) . (10 分)