

第4章 线性方程组

第4节 线性方程组解的结构（一）

主要内容

- 问题的提出
- 定义,如何求基础解系
- 例题巩固
- 小结、提出进一步的思考

一、问题的提出

(1) 齐次线性方程组 $AX=0$ 解的和，是该方程组的解吗？

(2) 齐次线性方程组 $AX=0$ 解的 k 倍，是该方程组的解吗？

问题

齐次线性方程组有非零解，这样其解的个数是无穷多个，

能否用部分解表示所有的解？

二、齐次线性方程组的基础解系

定义 若齐次线性方程组 $AX=0$ 的解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 满足：

(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ **线性无关**；

(2) 齐次线性方程组 $AX=0$ 的**任意一个解都可以由**
 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ **线性表出**.

则称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个**基础解系**.

若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解

系 则该方程组的任意 $X = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_t \eta_t$

基础解系的存在性与求法 ???

设齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 $r(A)=r \leq n$,

1. 当 $r=n$ 时, 因为齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解,

所以此时该方程组没有基础解系.

2. 当 $r < n$ 时,

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组 $AX=0$ 同解于



$$\text{令} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} \text{得}$$

方程组 $A X = 0$ 的所有解为

[illegible]

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 得 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{r+1} \\ -b_{r+2} \\ \dots \\ -b_{r+r} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{r+2} \\ -b_{r+2} \\ \dots \\ -b_{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -b_{1n-r} \\ -b_{2n-r} \\ \dots \\ -b_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

依次记这 $n-r$ 个解为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$.

(1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是方程组的一组**线性无关**的**解**.

(2) 方程组的**所有解** $X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r}\eta_{n-r}$,

方程组 $AX=0$ 的解可由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表示.

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的基础解系.

定理 在齐次线性方程组有非零解的情形下,

它有基础解系, 并且基础解系所含解的个数等于

$n-r$, 这里 r 是系数矩阵的秩, n 是未知量的个数.

例 求方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系，

并用基础解系表示其所有的解.

解： 对系数矩阵施行如下的初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 分别记为 η_1 , η_2 .

所以 η_1 , η_2 是原方程组的一个基础解系,
其所有解 $\mathbf{X} = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$.

小 结

1. 齐次线性方程组的基础解系的定义.
2. 如何去求齐次线性方程组的基础解系？

思考

1.找一找非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解与它的导出组 $AX = 0$ 的解关系？

2.该如何用导出组 $AX = 0$ 的解表示非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解？

谢谢！
