

第三节 n 阶行列式的定义

主要内容

- 概念的引入
- n 阶行列式的定义
- 举例

一、概念的引入

三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

说明(1) 三阶行列式共有6项, 即3!项.

说明(2) 每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

说明(3) 每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的列标排列的逆序数(行标为标准排列).

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$, 将行下标标准排列, 列下标排列312的逆序数为

$t(312)=2$, 偶排列. $a_{13}a_{21}a_{32}$ 的前面取+号.

例如 $a_{11}a_{23}a_{32}$, 将行下标标准排列, 列下标排列132的逆序数为

$t(132)=0+1=1$, 奇排列. $a_{11}a_{23}a_{32}$ 的前面取-号.

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}.$$

其中 Σ 是对列下标的所有排列求和($3!$ 项), t 是列下标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数.

二、 n 阶行列式的定义

定义 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$ ，得到形如 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的项，

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个, 因而共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式, 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$ ，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元。

这样定义的二阶、三阶行列式与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式显然是一致的。

说明1. 行列式是一种特定的算式,它是根据求解方程个数和未知量个数相同的线性方程组的需要而定义的;

说明2. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

说明3. n 阶行列式的每项都是位于不同行,不同列 n 个元素的乘积, $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^t$;

说明4. 一阶行列式的符号 $|a| = a$, 不要与绝对值符号相混淆,一般不使用此符号.

例1 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 式中，下列各元素连乘积前面应冠以什么符号？

$$(1) a_{15} a_{23} a_{32} a_{44} a_{51} a_{66}$$

$$(2) a_{21} a_{53} a_{16} a_{42} a_{65} a_{34}$$

$$(3) a_{61} a_{52} a_{43} a_{34} a_{25} a_{16}$$

通过该例题发现 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的一般项还可以记为

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，
偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

定理1 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

其中 t 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

定理2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n, q_1 q_2 \cdots q_n$ 是两个 n 级排列, t 为行标排列逆序数与列标排列逆序数的和.

例2 试判断 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{65}$ 和 $-a_{32} a_{43} a_{14} a_{51} a_{25} a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项.

解 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{65}$ 下标的逆序数为

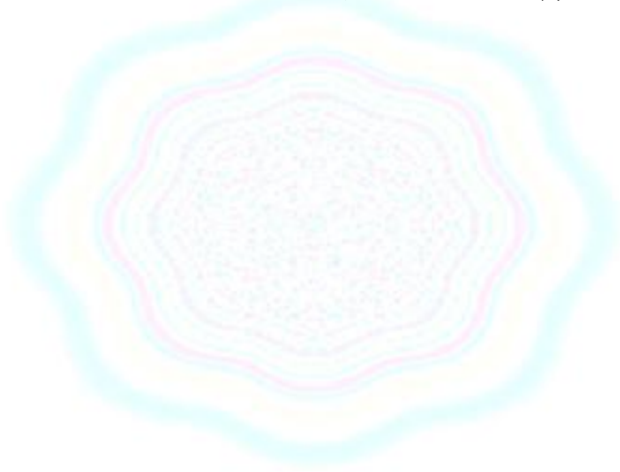
$$t(431265) = 3 + 2 + 1 = 6$$

所以 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{65}$ 是六阶行列式中的项.

$-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 下标的逆序数为

$$t(452316) = 8$$

所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是六阶行列式中的项.



$$(2) \quad a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$$

行标排列341562的逆序数为

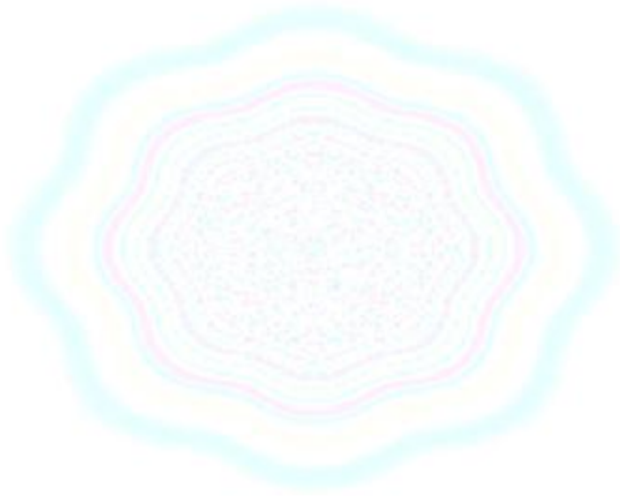
$$t = 6$$

列标排列234165的逆序数为

$$t = 4$$

所以 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 前边应带正号.

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n, q_1 q_2 \cdots q_n$ 是两个 n 级排列, t 为行标排列逆序数与列标排列逆序数的和.



三、 举例

例1 证明 n 阶行列式(其中主、次对角线上的元素是 λ_i , 未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$
$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

例2 证明下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} .$$

为了使同学们进一步加深对 n 阶行列式定义的理解，
下面再举一个例子。

例3 设有四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & 2 & -1 & 3x \\ 4 & -5x & 2 & -5 \\ 2x & 1 & -2x & 3 \\ 1 & x & 4x & 2 \end{vmatrix},$$

问该行列式的展开式是几次多项式，并求最高幂的系数。

四、小结

1. 行列式是一种根据特殊需要而定义的**特定算式**.
 n 阶行列式共有 $n!$ 项, 每项都是位于不同行, 不同列的
 n 个元素的乘积, 正负号由下标排列的逆序数决定.

2. 行列式的三种表示方法

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

$$D = \sum (-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n, q_1 q_2 \cdots q_n$ 是两个 n 级排列, t 为行标排列逆序数与列标排列逆序数的和.

