

《线性代数》第二章 矩阵及其运算

测试试卷（四）

姓名_____学号_____得分_____

一、选择题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB = BA =$ ()

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, 则必有 ()

- A. $A = B$ B. $AB = BA$ C. $A = E$ D. $B = E$

3. 若矩阵 A 可逆, 则下列等式成立的是 ()

- A. $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ B. $(3A)^{-1} = 3A^{-1}$ C. $A = \frac{1}{|A|} A^*$ D. $|A| = 0$

4. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 则下列命题正确的是 ()

- A. $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ 或 $B = 0$ B. $AB = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$
C. $AB \neq 0 \Leftrightarrow A \neq 0$ 或 $B \neq 0$ D. $AB \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$ 或 $|B| \neq 0$

5. 满足矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的矩阵 $X =$ ()

- A. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. 已知 2 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式 $|A| = -1$, 则 $(A^*)^{-1} =$ ()

A. $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

7. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 n 阶方阵, $|\mathbf{A}|=2$, $|\mathbf{B}|=-4$, 则 $|2\mathbf{B}^*\mathbf{A}^{-1}|=(\quad)$

A. -8 B. $(-8)^{n-1}$ C. $(-8)^n$ D. $(-8)^{n+1}$

8. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 4\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{E}$ n 阶单位矩阵, 则 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = (\quad)$

A. $\frac{1}{2}(2\mathbf{A} + \mathbf{E})$ B. $\frac{1}{3}(3\mathbf{A} + \mathbf{E})$ C. $\frac{1}{3}(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})$ D. $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})$

9. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶方阵, 则 $(\quad)$

- A. 若 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 可逆, 则 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆 B. 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆, 则 $\mathbf{AB}$ 可逆
C. 若 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 可逆, 则 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 可逆 D. 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 可逆

10. 若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 则下列一定正确的是 $(\quad)$

- A. $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ B. $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ C. $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ D. 以上可能均不成立

11. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^{-1} = (\quad)$

A. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

12. 设 $\mathbf{A}$ 为 3×2 矩阵, $\mathbf{B}$ 为 2×3 矩阵, $\mathbf{C}$ 为 3×3 矩阵, 则下列矩阵运算可行的是 $(\quad)$

- A. $\mathbf{ABC}$ B. $\mathbf{BAC}$ C. $\mathbf{AB} - \mathbf{BC}$ D. $\mathbf{AC}$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 A, B 都是四阶方阵, 且 $|A| = -2$, $|B| = -\frac{1}{3}$, 则 $|-3AB| =$ _____.

2. 设 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $X =$ _____.

3. 在下列三对矩阵中满足 $AB = BA$ 的对数为_____.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = (a_1, a_2)$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$, 若 AB 为可逆矩阵, 则 k 满足条件_____.

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$, 如果 A 为不可逆矩阵, 则常数 k 的值为_____.

6. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & c \\ a & 0 & 1 & b \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 是对称矩阵, 则 a, b, c 的值分别为_____.

三、简答题 (共 40 分)

1. 已知 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. (12 分)

(1) 求 $A = PBQ$

(2) 求 QP

(3) 求 A^5

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = A^2 - 3A + 2E$, 求 B^{-1} . (8 分)

3. 设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X . (6 分)

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} . (6 分)

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, 求 A^{50} 和 A^{51} . (8 分)