

《线性代数》模拟试卷（十八）

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是().

- A. $k \neq -1$ B. $k \neq 3$ C. $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$ D. $k \neq -1$ 或 $k \neq 3$

2. 设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{X} = ($).

- A. $\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$

3. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵为 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 且 $|\mathbf{A}| > 0$, 则 $\mathbf{A} = ($).

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. 矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{PA}$ 为 $\mathbf{A}$ 的行最简形矩阵, 则矩阵 $\mathbf{P}$ 为().

- A. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. 设向量组 $\alpha_1 = (a, 0, c)^T$, $\alpha_2 = (b, c, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, a, b)^T$, 若常数 a, b, c 满足 $abc = 0$, 则该向量组的秩 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = ($).

- A. 无法确定 B. > 3 C. $= 3$ D. < 3

6. 设 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 则下面成立的是 ().

A. $2\eta_1 - 3\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

B. $3\eta_1 - 2\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

C. $\eta_1 + \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

D. $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

二、填空题 (每小空 3 分, 共 12 分)

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ 的解 x 为_____.

2. 已知 4 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 8$, $B = \frac{1}{2}A$, 则 $|B| =$ _____.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则矩阵 A 的最高阶非零子式的阶数是_____.

4. 求向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的一个最大线性无关组_____.

三、计算题 (共 8 小题, 共 70 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 的值. (8 分)

3. 解矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{B}$, 其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. (8 分)

4. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 问 a 为何值时, $R(\mathbf{A})=2$; a 为何值时, $R(\mathbf{A})=3$. (6 分)

5. 设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + (\lambda - 1)x_2 - 2x_3 = 1 \\ (\lambda - 2)x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 3 \\ (2\lambda + 1)x_3 = 5 \end{cases}$$
, 讨论 λ 取何值时, (1) 方程组无解? (2)

有唯一解? (3) 有无穷多解? 在方程组有无穷多解时, 求其通解. (12 分)

6. 设四元非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵的秩 $R(\mathbf{A})=2$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是

$Ax = \beta$ 的三个解向量, 且 $\eta_1 = (4, 3, 2, 1)^T$, $\eta_2 = (1, 3, 5, 1)^T$, $\eta_3 = (-2, 6, 3, 2)^T$ 求 $Ax = \beta$ 的通解. (8 分)

7. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3+a \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4+a \end{pmatrix}$, 问 a 为何值

时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时求一个最大线性无关组, 并将其余向量用该最大线性无关组线性表示. (12 分)

8. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (9 分)