

《线性代数》模拟试卷（十四）答案

一、判断题（正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

（ × ） 1. 对于任意的两个矩阵 A, B ，一定有 $AB = BA$ 。

（ × ） 2. 设 A 为初等矩阵，则 $A^{-1} = A$ 。

（ × ） 3. 任何一个线性方程组都可以用克莱默法则求解。

（ √ ） 4. 任一含有零向量的向量组必定线性相关。

（ √ ） 5. 集合 $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, x \in R \right\}$ 不是一个向量空间。

二、填空题（每小空3分，共15分）

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的最简形矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. 排列 41253 的逆序数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: 4

4. 向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$ 与 $\alpha_2 = (2, 2, 2)^T$ 线性相关还是线性无关? $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: 相关

5. 把向量 $\alpha = (1, 1, -1)^T$ 单位化后的向量为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1)^T$

三、单项选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} 的关系是 ().

A. $M_{ij} = -A_{ij}$ B. $M_{ij} = A_{ij}$ C. $M_{ij} = (-1)^n A_{ij}$ D. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

答案: D

2. 设 A, B 为任意方阵, 则必有 ().

A. $AB = 0$, 则 $A = 0$ 或 $B = 0$ B. $(AB)^T = A^T B^T$
C. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ D. $A^2 + AB = 0$ 且 A 可逆, 则 $A+B = 0$

答案: D

3. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 λ 为 ().

A. 1 B. 2 C. 0 D. -1

答案: D

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3×1 矩阵, 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_3 - 2\alpha_1, 3\alpha_2, \alpha_1)$, 若

$|A| = -2$, 则 $|B| =$ ().

A. -6 B. 6 C. 3 D. 2

答案: B

5. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 3, 5)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 2)^T$ 的秩为 ().

A. 3 B. 1 C. 4 D. 2

答案: D

6. 设 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_3 = (2, 0, 2)^T$, $\alpha_4 = (3, 1, 4)^T$, 则下列不是该向量组的极大线性无关组的是 ().

A. α_1, α_3 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_2, α_3

答案: C

7. 设 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 则下面成立的是().

A. $2\eta_1 - 3\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

B. $3\eta_1 - 2\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

C. $\eta_1 + \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

D. $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

答案: B

8. 设 $\lambda = 2$ 为可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等().

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

答案: C

四、计算题 (共 6 小题, 共 51 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

解: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (3 分)

$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (6 分)

$= 5$ (7 分)

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 的值. (7 分)

$$\text{解: } A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= -18 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \quad (7 \text{ 分})$$

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 是否可逆若可逆求其逆矩阵. (7 分)

$$\text{解: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ 则 } A \text{ 可逆.} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{构造矩阵 } (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

4. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 2$, η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的三个解向量, 且 $\eta_1 = (4, 3, 2, 1)^T$, $\eta_2 = (1, 3, 5, 1)^T$, $\eta_3 = (-2, 6, 3, 2)^T$ 求 $Ax = \beta$ 的通解. (10 分)

解: 已知方程组是四元, 且 $R(A) = 2$, 则由非齐次线性方程组解的结构知, 导出组的基础解析中含有两个解向量, 设为 ξ_1, ξ_2 (3 分)

$$\xi_1 = \eta_1 - \eta_2 = (4, 3, 2, 1)^T - (1, 3, 5, 1)^T = (3, 0, -3, 0)^T$$

$$\xi_2 = \eta_1 - \eta_3 = (4, 3, 2, 1)^T - (-2, 6, 3, 2)^T = (6, -3, -1, -1)^T \quad (6 \text{ 分})$$

又因为非齐次线性方程组有特解 $\eta_1 = (4, 3, 2, 1)^T$ (8 分)

则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = \eta_1 + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$, $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ (10 分)

$$5. \text{ 求矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ 的特征值与特征向量. (10 分)}$$

解: A 的特征多项式为 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ (4 分)

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程 $(A - E)x = O$. 由

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量为 $k\alpha_1$ (常数 $k \neq 0$). (6 分)

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 解方程 $(A - 2E)x = O$. 由

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的全部特征向量为 $k\alpha_2$ (常数 $k \neq 0$). (8 分)

当 $\lambda_3 = 3$ 时, 解方程 $(A - 3E)x = O$. 由

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量为 $k\alpha_3$ (常数 $k \neq 0$). (10 分)

6. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基分别为 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 和

$\beta_1 = (1, 0, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 1, 0)^T$, $\beta_3 = (1, 1, 1)^T$, 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵. (10 分)

解: 设从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P . (1 分)

则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$ (2 分)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{则 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ 分})$$