

## 第四节 行列式的性质

### 主要内容

- 行列式的性质
- 应用举例
- 小结 思考题



# 复习

1. 行列式是一种根据特殊需要而定义的**特定算式**.

$n$  阶行列式共有  $n!$  项, 每项都是位于不同行, 不同列的  $n$  个元素的乘积, 正负号由下标排列的逆序数决定.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$



# 复习

## 2. 行列式的三种表示方法

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

$$D = \sum (-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$$



# 复习

## 对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$



# 复习

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = ?$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$



## 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} .$$



## 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$



例1

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 1$$

则,  $a = ?$

$$a = \frac{1}{2}$$



## 例2

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = ?$$

则,  $(-1)^{t(2341)} a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} = -1$



### 例3

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{中, } x \text{ 的一次项系数}$$

$$(-1)^t x \cdot 1 \cdot 1 = (-1)^{t(321)} a_{13} a_{22} a_{31} = x$$

$$(-1)^t x \cdot (-1) \cdot 0 = 0$$

所以一次项为  $x$ , 系数为1。



# 新课引入

计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$n$ 阶行列式共有 $n!$ 项, 因此用定义计算 $n$ 阶行列式较为困难, 只有三角形等特殊行列式用定义计算比较方便.



上三角形行列式结构较为简单，又比较容易  
计算结果，普通的行列式能否转换成这种类型？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$



## 思考

能否把一般的行列式化成三角形行列式来计算呢？

这就需要研究行列式的性质.



# 一、行列式的性质

## 探究一

计算二阶, 三阶列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



## 发现1

$$D_1 = D_2 = 10$$

$$D_3 = D_4 = -7$$

$D_1$ 与 $D_2$ 的行列互换



# 行列式的转置

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式  $D^T$  称为行列式  $D$  的转置行列式.

**性质1** 行列式与它的转置行列式相等.



**证明** 记  $D = \det(a_{ij})$  的转置行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即  $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ , 按定义

$$D^T = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

又因为行列式  $D$  可表示为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$



故  $D = D^T$ .

证毕

**说明** 行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

上页

下页

返回



## 探究二

计算  $D_1, D_5, D_3, D_7$  并说出它们的关系

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_7 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

发现2

$$D_1 = -D_5 = 10$$

$$D_3 = -D_7 = -7$$

**性质2** 对换行列式的两行（列），行列式变号.



计算

$$D_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_9 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

发现3

$$D_8 = D_9 = 0$$

它们有两行对应元素相同

**推论** 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

上页

下页

返回



例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

**证明** 互换相同的两行, 有  $D = -D$ ,

$$\therefore D = 0.$$



### 探究三

计算

$$D_{10} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

发现4

$$D_{10} = D_{11} = 28$$

上页

下页

返回



**性质3** 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数  $k$ ，等于用数  $k$  乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**推论** 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.





$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$



**性质 4** 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零.

**证明**

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 = k
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 = 0.$$



计算 $D_{13}, D_{14}, D_{15}$ 的值, 并研究它们的关系

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1+1 & 4+0 & 2+4 \end{vmatrix}$$

$$D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_{15} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$



**性质5** 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和.

例如  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

则 $D$ 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



## 探究

给行列式 $D_{16}$ 的第一行乘-1加到第二行，得到行列式 $D_{17}$

$$D_{16} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$D_{17} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

研究它们的关系？

发现

$$D_{16} = D_{17}$$



**性质 6** 把行列式的某一行（列）的各元素乘同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

例如

列如

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \leftarrow \\
 \text{---} \\
 \leftarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 k \times \\
 \\
 
 \end{array}$$

$r_i + kr_j$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj}
 \end{array}$$



观察以下问题：

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

交换第一行和第二行得到

$$D = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$



给第二行乘以-3加到第三行

$$D = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

发现这时的行列式是上三角形行列式，它的值等于主对角线元素的乘积.



## 思考

对于一般的行列式也可以利用行列式的性质，转化为上三角形行列式吗？

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

请同学们积极思考，并发表自己的看法.



## 二、应用举例

计算行列式常用方法：利用运算  $r_i + kr_j$  把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值。

例 1  $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$

Diagram illustrating row operations:  
- The first row  $[1, -1, 2, -3, 1]$  is highlighted with a blue box.  
- An arrow labeled  $\times 3$  points from the first row to the second row.  
- An arrow labeled  $\oplus$  points from the first row to the third row.



解

$D =$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \times 3 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 & \oplus \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 & \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 & \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 & \end{array}$$

$r_2 + 3r_1$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 & \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 & \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 & \end{array}$$

上页

下页

返回



$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \hline \hline
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc|c}
 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \times(-2) \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & \\
 2 & 0 & 4 & -2 & 1 & \oplus \\
 3 & -5 & 7 & -14 & 6 & \\
 4 & -4 & 10 & -10 & 2 & 
 \end{array}$$

Diagram illustrating row operations on an augmented matrix. The first row is multiplied by  $-2$  and added to the second row ( $\oplus$ ). The second row is then multiplied by  $-4$  and added to the third row ( $\oplus$ ).

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \hline \hline
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc|c}
 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \times(-3) \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & \\
 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & \oplus \\
 3 & -5 & 7 & -14 & 6 & \\
 4 & -4 & 10 & -10 & 2 & 
 \end{array}$$

Diagram illustrating row operations on an augmented matrix. The first row is multiplied by  $-3$  and added to the third row ( $\oplus$ ). The second row is then multiplied by  $-4$  and added to the fourth row ( $\oplus$ ).



$$\begin{array}{l} r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right|$$

$$\underline{r_2 \leftrightarrow r_4}$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right|$$

 $\oplus$ 

上页

下页

返回



$$\begin{array}{c}
 \underline{\underline{r_3 + r_2}} - \\
 \left| \begin{array}{ccccc}
 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 2 & 2 & -2
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \oplus \\
 \oplus
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \underline{\underline{r_4 + r_3}} - \\
 \left| \begin{array}{ccccc}
 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 2 & -2
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \times (-2) \\
 \oplus
 \end{array}$$



$$\underline{r_5 - 2r_3} - \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \times 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & \oplus \end{array}$$

$$\underline{r_5 + 4r_4} - \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & \end{array} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$



例2 计算  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 将第  $2, 3, \dots, n$  都加到第一列得

$$D = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$



$$= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$



例3

设  $D =$

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{matrix}} & & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}} \\ \vdots & & \vdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明  $D = D_1 D_2.$



## 证明

对  $D_1$  作运算  $r_i + kr_j$ , 把  $D_1$  化为下三角形行列式

$$\text{设为 } D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$$

对  $D_2$  作运算  $c_i + kc_j$ , 把  $D_2$  化为下三角形行列式

$$\text{设为 } D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & p_{nk} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$



对  $D$  的前  $k$  行作运算  $r_i + kr_j$ , 再对后  $n$  列作运算  $c_i + kc_j$ , 把  $D$  化为下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故  $D = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2.$



### 三、小结

行列式的6个性质(行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立).

计算行列式常用方法: (1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式,从而算得行列式的值.