

第一节 二维随机变量

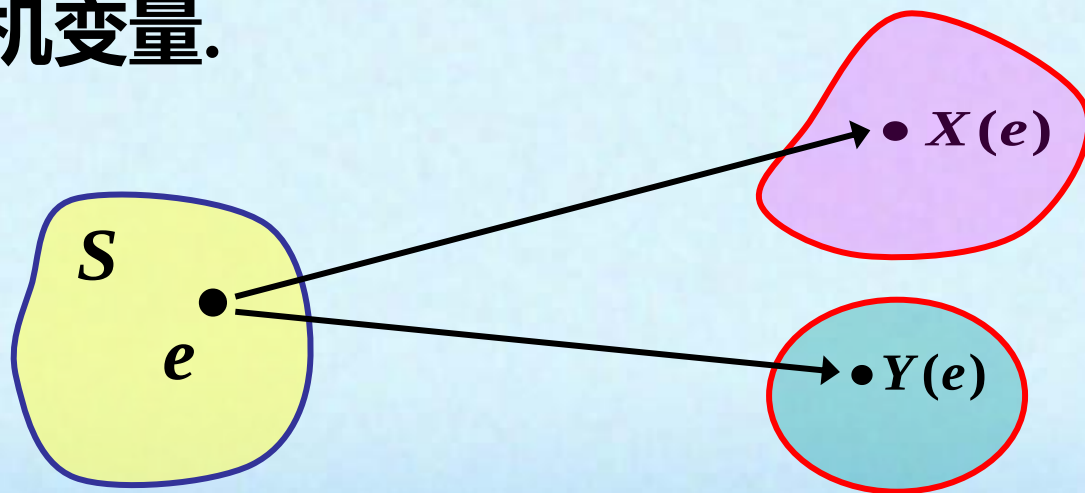
- 一、二维随机变量及其分布函数
- 二、二维离散型随机变量
- 三、二维连续型随机变量
- 四、小结

一、二维随机变量及其分布函数

1. 定义

设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, 设 $X = X(e)$ 和 $Y = Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的一个向量 (X, Y) , 叫做二维随机向量或二维随机变量.

图示



实例1 炮弹的弹着点的位置 (X, Y) 就是一个二维随机变量.

实例2 考查某一地区学前儿童的发育情况, 则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H, W) .

说明 二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X 、 Y 有关, 而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.



2. 二维随机变量的分布函数

(1) 分布函数的定义

定义 设 (X, Y) 是二维随机变量, 对于任意实数 x, y , **二元函数**:

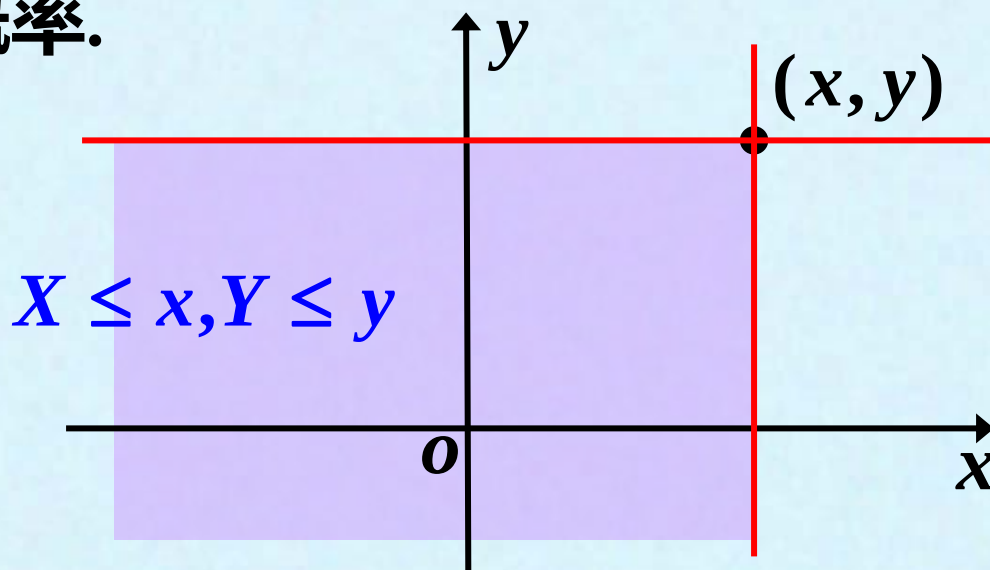
$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} \stackrel{\text{记成}}{=} P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或称为**随机变量 X 和 Y 的联合分布函数**.

如果将二维随机变量 (X, Y) 看成是平面上随机点的坐标, 那么, 分布函数 $F(x, y)$ 在 (x, y) 处的



函数值就是随机点 (X, Y) 落在如图所示的以 (x, y) 为顶点而位于该点左下方的无穷矩形域内的概率.



随机点 (X, Y) 落在矩形域 $\{(x, y) | x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\}$ 的概率为

$$\begin{aligned} & P\{x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\} \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2). \end{aligned}$$

(2) 分布函数的性质

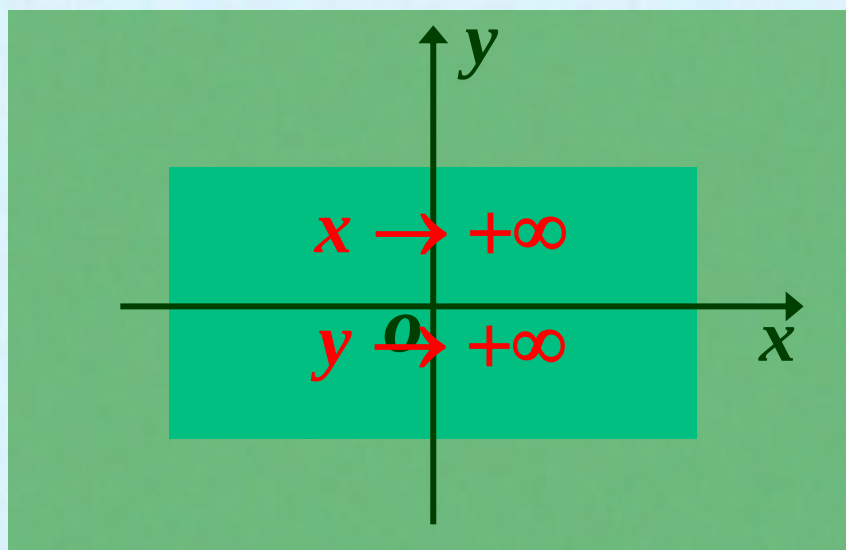
1° $F(x, y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数, 即对于任意固定的 y , 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$; 对于任意固定的 x , 当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2° $0 < F(x, y) < 1$, 且

对于任意固定的 y , $F(-\infty, y) = 0$,



对于任意固定的 x , $F(x, -\infty) = 0$,
 $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.



3° $F(x+0, y) = F(x, y)$, $F(x, y+0) = F(x, y)$,
即 $F(x, y)$ 关于 x 右连续, 关于 y 也右连续.

4° 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 下述不等式成立:

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$$

证明 $P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$

$$= P\{X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_1, y_1 < Y \leq y_2\}$$

$$= P\{X \leq x_2, Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_2, Y \leq y_1\}$$

$$- P\{X \leq x_1, Y \leq y_2\} + P\{X \leq x_1, Y \leq y_1\} \geq 0,$$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$



二、二维离散型随机变量

1. 定义

如果二维随机变量 (X, Y) 全部可能取到的不相同的值是有限对或可列无限多对, 则称 (X, Y) 是离散型的随机变量.



2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量 (X, Y) 所有可能取的值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots$, 记 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$, 则由概率的定义有

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1,$$

称 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$ 为二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律, 或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.



二维随机变量 (X, Y) 的分布律也可表示为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	



例1 设随机变量 X 在1,2,3,4四个整数中等可能地取一个值, 另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数. 试求 (X, Y) 的分布律.

解 用乘法公式容易求得 (X, Y) 的分布律. 易知 $\{X = i, Y = j\}$ 的取值情况是: $i = 1, 2, 3, 4$, j 取不大于 i 的正整数. 且

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j | X = i\}P\{X = i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4},$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \quad j \leq i.$$



于是 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$



三、二维连续型随机变量

1. 定义

对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$, 如果存在非负可积函数 $f(x, y)$ 使对于任意 x, y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) \, du \, dv,$$

则称 (X, Y) 是连续型的二维随机变量, **函数**

$f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的概率密度, **或**称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.



2.性质

1° $f(x, y) \geq 0$.

2° $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = F(\infty, \infty) = 1$.

3° 设 G 是 xOy 平面上的区域, 点 (X, Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) \, dx \, dy.$$

4° 若 $f(x, y)$ 在 (x, y) 连续, 则有

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$



3.说明

由性质4°, 在连续点 (x, y) 处有

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0+ \\ \Delta y \rightarrow 0+}} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$\begin{aligned} & \text{由(1.1)} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0+ \\ \Delta y \rightarrow 0+}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) \\ & \quad - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)] \\ &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \end{aligned}$$



这表示:

若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续, 则当 $\Delta x, \Delta y$ 很小时,
 $P\{x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y\} \approx f(x, y)\Delta x\Delta y$,
即 (X, Y) 落在小长方形 $(x, x + \Delta x] \times (y, y + \Delta y]$ 内的
概率近似地等于 $f(x, y)\Delta x\Delta y$.

在几何上 $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面
由性质2°知,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1,$$

介于 $z = f(x, y)$ 和 xOy 平面的空间区域的体积为1.



由性质3°,

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y) dx dy.$$

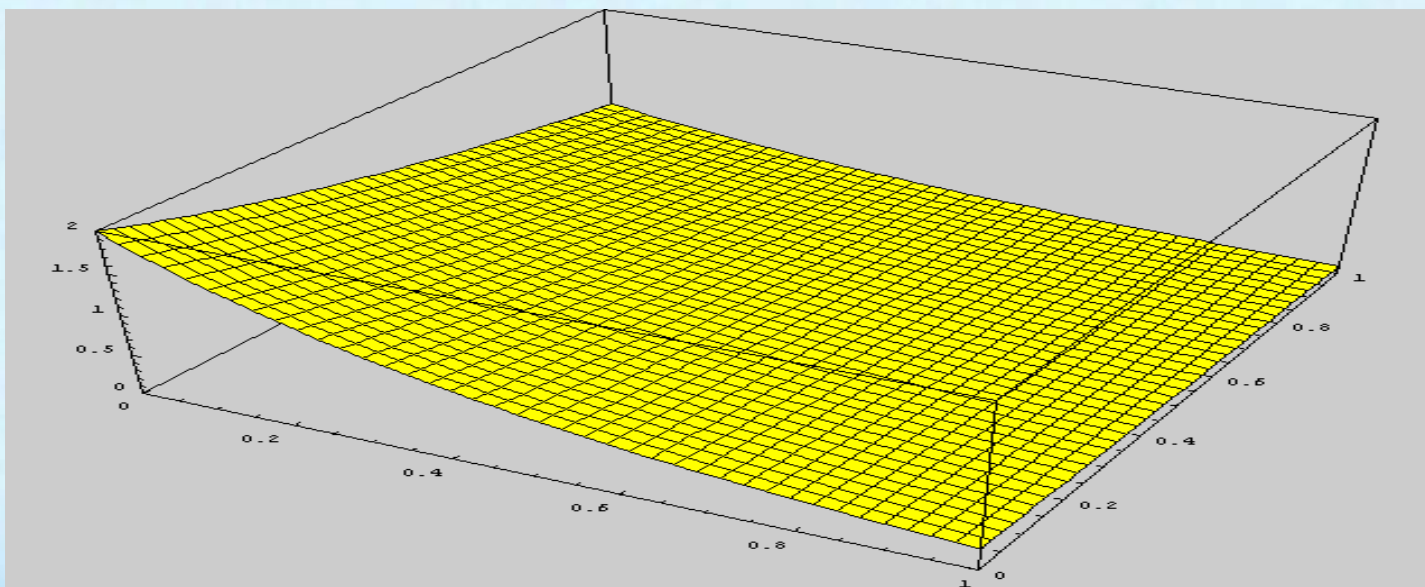
$P\{(X,Y) \in G\}$ 的值等于以 G 为底, 以曲面
 $z = f(x,y)$ 为顶面的柱体体积 .



例2 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x, y)$; (2) 求概率 $P\{Y \leq X\}$.



解 (1)
$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$$

$$= \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 2e^{-(2x+y)} dx dy, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

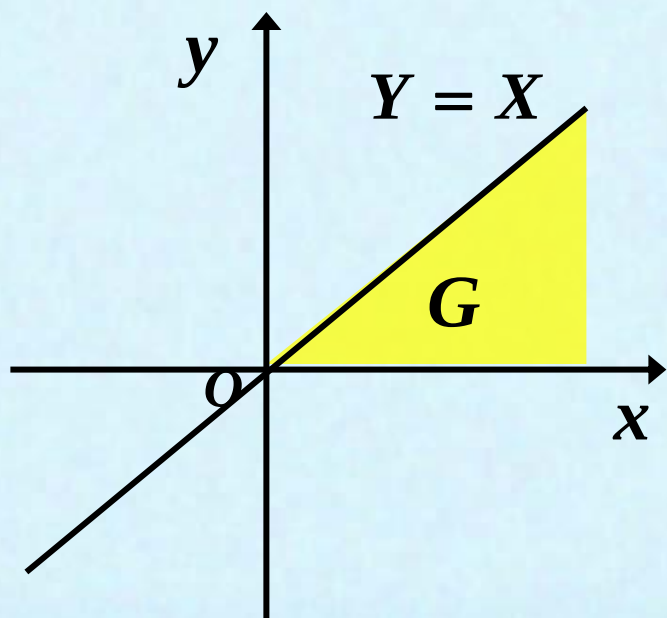
即有
$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) 将 (X, Y) 看成是平面上随机点的坐标, 即有 $\{Y \leq X\} = \{(X, Y) \in G\}$, 其中 G 为 xOy 平面上直线



$y = x$ 及其下方的部分. 于是

$$P\{Y \leq X\} = P\{(X, Y) \in G\}$$



$$= \iint_G f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)} dx dy$$

$$= \frac{1}{3}.$$



推广 n 维随机变量的概念

定义 设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, 设 $X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), \dots, X_n = X_n(e)$ 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.



对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数或随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合分布函数.



四、小结

二维随机变量的分布函数

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}.$$

二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots;$$

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} p_{ij}.$$

二维连续型随机变量的概率密度

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv.$$



第二节 边缘分布

- 一、边缘分布函数
- 二、离散型随机变量的边缘分布律
- 三、连续型随机变量的边缘分布
- 四、小结

一、边缘分布函数

问题： 已知 (X, Y) 的分布, 如何确定 X, Y 的分布?



$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, F(x) = P\{X \leq x\},$$



$$P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty) = F_X(x)$$



(X, Y) 关于 X 的边缘分布函数 .



定义 设 $F(x, y)$ 为随机变量 (X, Y) 的分布函数，
则 $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$.

令 $y \rightarrow \infty$, 称 $P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$
为随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘分布函数. 记为

$$F_X(x) = F(x, \infty).$$

同理令 $x \rightarrow \infty$,

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = P\{X < \infty, Y \leq y\} = P\{Y \leq y\}$$

为随机变量 (X, Y) 关于 Y 的边缘分布函数.



二、离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$.

记
$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots,$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, j = 1, 2, \dots,$$

分别称 $p_{i\cdot}$ ($i = 1, 2, \dots$) 和 $p_{\cdot j}$ ($j = 1, 2, \dots$) 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.



3.2 边缘分布

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, 2, \cdots.$$



因此得离散型随机变量关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$



例1 已知下列分布律, 求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$



解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i \cdot}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布



边缘分布



例2 一整数 N 等可能地在 $1, 2, 3, \dots, 10$ 十个值中取一个值. 设 $D = D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F = F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数(注意1不是素数). 试写出 D 和 F 的联合分布律, 并求边缘分布律.

解 样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分布律:

3.2 边缘分布

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F = j\}$
0	1/10	0	0	0	1/10
1	0	4/10	2/10	1/10	7/10
2	0	0	0	2/10	2/10
$P\{D = i\}$	1/10	4/10	2/10	3/10	1

或将边缘分布律表示为:

D	1	2	3	4
p_k	1/10	4/10	2/10	3/10

F	0	1	2
p_k	1/10	7/10	2/10

三、连续型随机变量的边缘分布

定义 对于连续型随机变量 (X, Y) , 设它的概率密度为 $f(x, y)$, 由于

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx,$$

记
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

称其为随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度.



同样, Y 也是一个连续型随机变量, 其概率密度为

$$F_Y(y) = F(\infty, y)$$

$$= \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy,$$


$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$



Y 的边缘概率密度.



例3 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

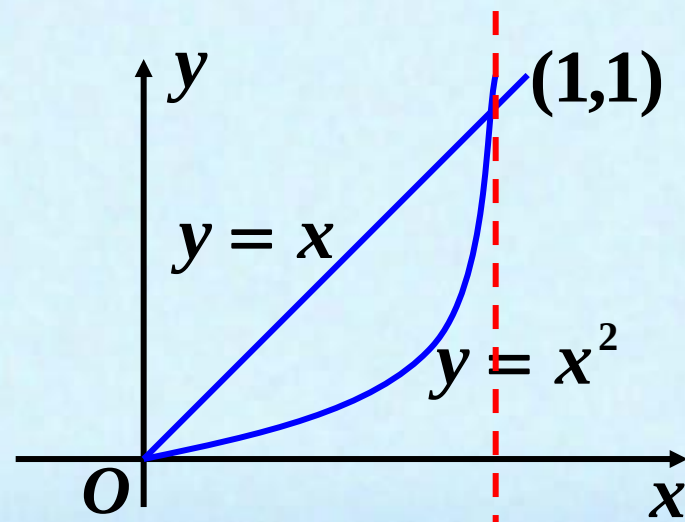
$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

解 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

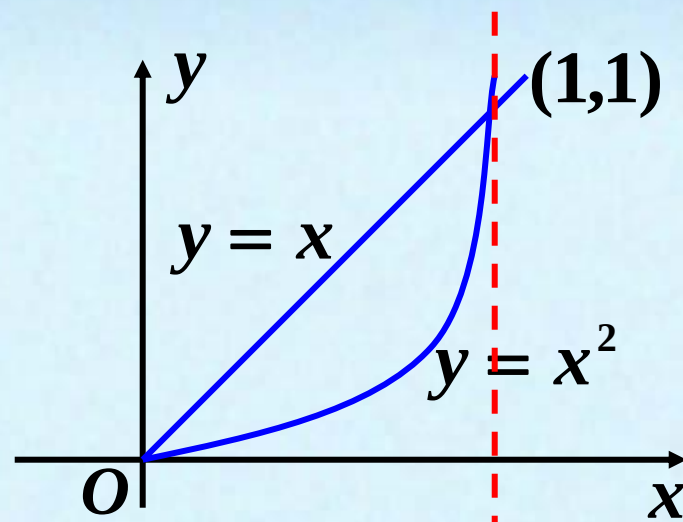
当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{x^2}^x 6 dy \\ &= 6(x - x^2). \end{aligned}$$



当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

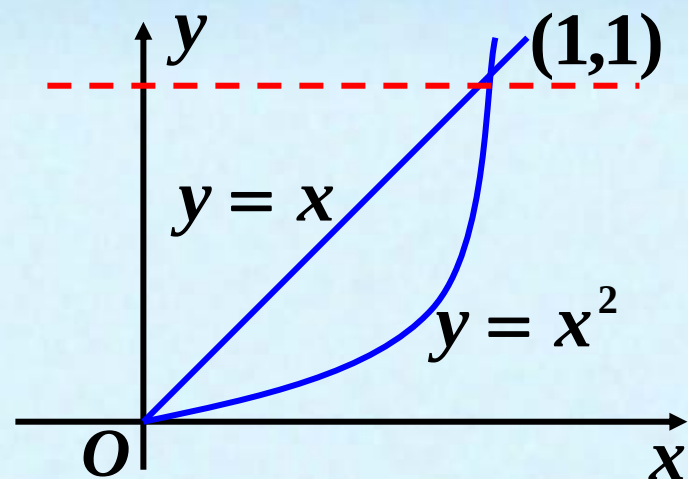


因而得
$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\ &= \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx \\ &= 6(\sqrt{y} - y), \end{aligned}$$



当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = 0$.

得
$$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



例4 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$
$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty,$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$. 我们称 (X, Y) 为服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布. 记为

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho).$$



求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

由于
$$\frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$= \left[\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right]^2 - \rho^2 \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$



于是
$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2} dy,$$

令
$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right),$$

则有
$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$



即

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

同理

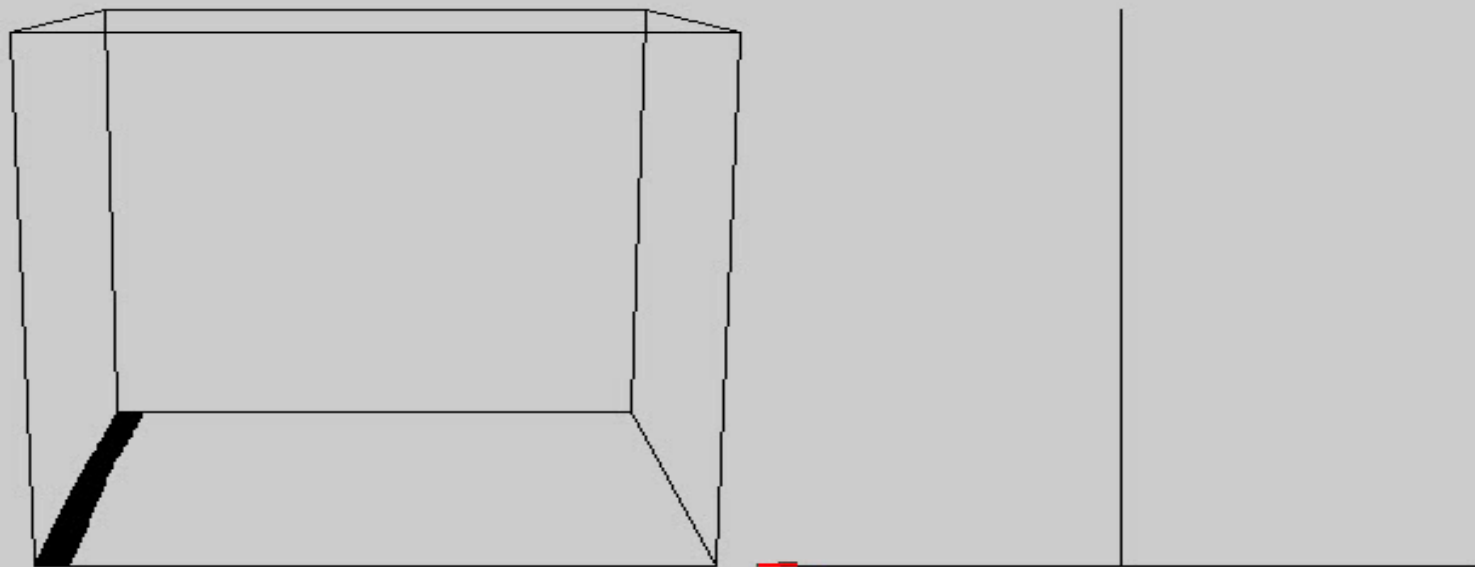
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，
并且都不依赖于参数 ρ 。



二维正态分布和其边缘分布的关系

单击图形播放/暂停 ESC键退出



请同学们思考

边缘分布均为正态分布的随机变量, 其联合分布一定是二维正态分布吗?

答 不一定. 举一反三例以示证明.



解答： 令 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y),$$

显然, (X, Y) 不服从正态分布, 但是

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量, 其联合分布不一定是二维正态分布.



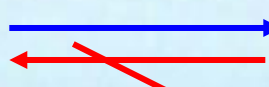
四、小 结

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

联合分布  边缘分布



第三节 条件分布

- 一、离散型随机变量的条件分布
- 二、连续型随机变量的条件分布
- 三、小结

一、离散型随机变量的条件分布

问题 考虑一大群人,从其中随机挑选一个人,分别用 X 和 Y 记此人的体重和身高,则 X 和 Y 都是随机变量,他们都有自己的分布.

现在如果限制 Y 取值从1.5米到1.6米,在这个限制下求 X 的分布.



设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = P_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

(X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{X = x_i\} = P_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$P\{Y = y_j\} = P_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

设 $p_{\cdot j} > 0$, 现在考虑在事件 $\{Y = y_j\}$ 已发生的条件下事件 $\{X = x_i\}$ 发生的概率 $P\{X = x_i | Y = y_j\}$



由条件概率公式, 可得

$$\begin{aligned} P\{X = x_i | Y = y_i\} &= \frac{P\{X = x_i, Y = y_i\}}{P\{Y = y_i\}} \\ &= \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$



条件概率具有分布律的性质:

$$1^\circ P\{X = x_i | Y = y_j\} \geq 0;$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i | Y = y_j\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{1}{p_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \\ &= \frac{p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}} = 1. \end{aligned}$$



定义 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 对于固定的 j , 若 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, i = 1, 2, \dots,$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同样, 对于固定的 i , 若 $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, j = 1, 2, \dots,$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.



例1 在一汽车工厂中，一辆汽车有两道工序是由机器人完成的。其一是紧固3只螺栓，其二是焊接2处焊点。以 X 表示螺栓紧固得不良的数目，以 Y 表示由机器人焊接的不良焊点的数目。据积累的资料知 (X,Y) 具有分布律：

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y = j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X = i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000



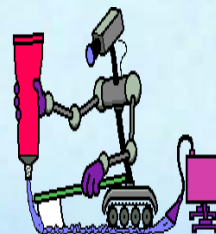
- (1) 求在 $X = 1$ 的条件下, Y 的条件分布律;
(2) 求在 $Y = 0$ 的条件下, X 的条件分布律.

解 边缘分布已经求出列在上表中.

在 $X = 1$ 的条件下, Y 的条件分布律为

$$P\{Y = 0|X = 1\} = \frac{P\{X = 1, Y = 0\}}{P\{X = 1\}} = \frac{0.030}{0.045},$$

$$P\{Y = 1|X = 1\} = \frac{P\{X = 1, Y = 1\}}{P\{X = 1\}} = \frac{0.010}{0.045},$$



$$P\{Y = 2|X = 1\} = \frac{P\{X = 1, Y = 2\}}{P\{X = 1\}} = \frac{0.005}{0.045},$$

或写成

$Y = k$	0	1	2
$P\{Y = k X = 1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

同样可得在 $Y = 0$ 的条件下 X 的条件分布律为

$X = k$	0	1	2	3
$P\{X = k Y = 0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$



例2—射手进行射击,击中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$,射击直至击中目标两次为止. 设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数, 以 Y 表示总共进行的射击次数, 试求 X 和 Y 的联合分布律及条件分布律.

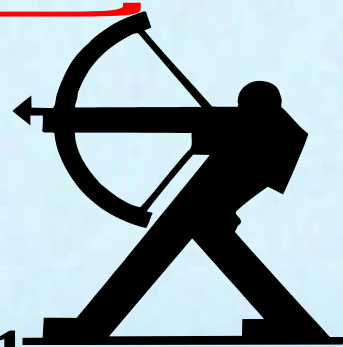
解 由题意知 X 取 m 且 Y 取 n 时, 有

$$P\{X = m, Y = n\} = p \cdot p \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p)}_{(n-2)\uparrow}$$

即得 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X = m, Y = n\} = p^2 q^{n-2},$$

其中 $q = 1 - p, n = 2, 3, \cdots; m = 1, 2, \cdots, n - 1$.



现在求条件分布律.

$$P\{X = m|Y = n\}, \quad P\{Y = n|X = m\},$$

$$\text{由于 } P\{X = m\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 q^{n-2}$$

$$= p^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-2} = \frac{p^2 q^{m-1}}{1-q} = pq^{m-1},$$

$$P\{Y = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\} \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = (n-1)p^2 q^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots.$$

所以当 $n = 2, 3, \dots$ 时,

$$P\{X = m|Y = n\} = \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{Y = n\}}$$

$$= \frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1)p^2 q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

当 $m = 1, 2, \dots, n-1$ 时,

$$P\{Y = n|X = m\} = \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{X = m\}}$$

$$= \frac{p^2 q^{n-2}}{p q^{m-1}} = p q^{n-m-1}, \quad n = m+1, m+2, \dots.$$



二、连续型随机变量的条件分布

定义 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 若对于固定的 y , $f_Y(y) > 0$, 则称 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y = y$ 的

条件下 X 的条件概率密度, 记为 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$.

称 $\int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$ 为在 $Y = y$ 的条

件下 X 的条件分布函数,记为 $P\{X \leq x|Y = y\}$ 或 $F_{X|Y}(x|y)$, 即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x|Y = y\} = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx.$$

类似地, 可以定义 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ 和

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy.$$



请同学们思考

为什么不能用条件概率的定义来直接定义条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)$?

答 条件分布是指在一个随机变量取某个确定值的条件下, 另一个随机变量的分布, 即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\}.$$

由于 $P\{Y = y\}$ 可能为零(连续型时一定为零). 故直接用条件概率来定义时, 会出现分母为零.

因此, 在条件分布中, 作为条件的随机变量的取值是确定的数.



条件分布函数与条件密度函数的关系

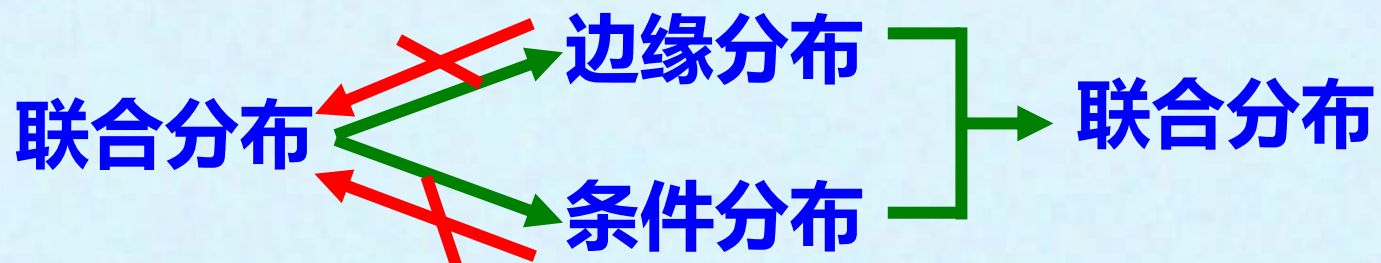
$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^x [f(x, y) / f_Y(y)] \mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(y|x) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^y [f(x, y) / f_X(x)] \mathrm{d}y.$$



说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下：



例3 设 G 是平面上的有界区域, 其面积为 A .
若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则称 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布. 现设二维随机变量在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布, 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 由假设随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

且有边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & -1 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

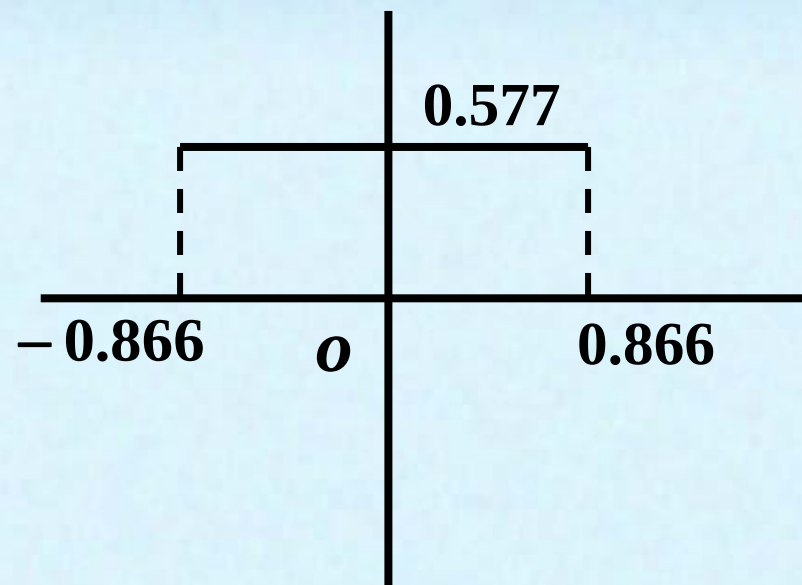
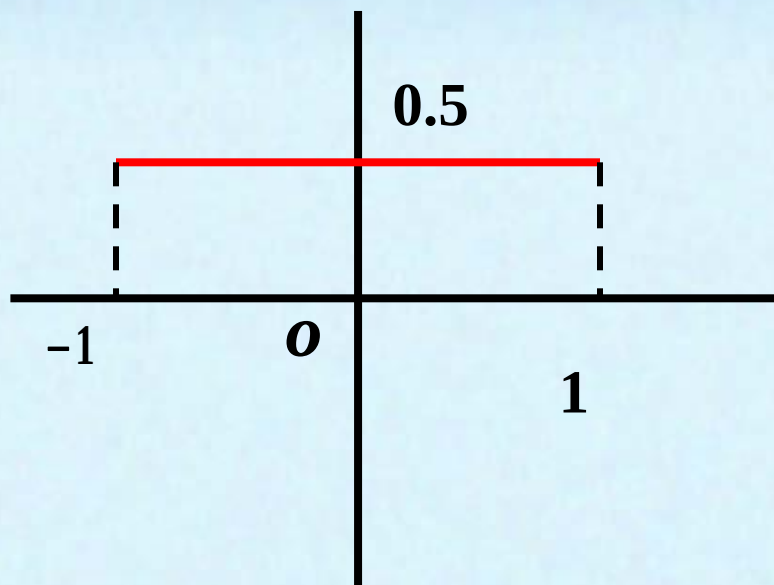
于是当 $-1 < y < 1$ 时, 有

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当 $y = 0$ 和 $y = \frac{1}{2}$ 时 $f_{X|Y}(x|y)$ 的图形分别如下图所示.



3.3 条件分布



例4 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值,当观察到 $X = x$ ($0 < x < 1$) 时,数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机的取值,求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 按题意 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对于任意给定的值 $x(0 < x < 1)$,在 $X = x$ 的条件下,
 Y 的条件概率密度为



$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由定义得 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

于是得关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$
$$= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



三、小 结

1. 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, $p_{ij} (i, j = 1, 2, \dots)$ 为其联合分布律, 在给定 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$\begin{aligned} P\{X = x_i | Y = y_j\} &= \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} \\ &= \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \end{aligned}$$

在给定 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}$$
$$= \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中 $i, j = 1, 2, \dots$.



2. 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 则有

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx \\ &= \int_{-\infty}^x [f(x, y) / f_Y(y)] dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y|x) &= \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(y|x) dy \\ &= \int_{-\infty}^y [f(x, y) / f_X(x)] dy. \end{aligned}$$

第四节 相互独立的随机变量

- 一、随机变量的相互独立性
- 二、二维随机变量的推广
- 三、小结

一、相互独立的随机变量

1. 定义

设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数. 若对于所有 x, y 有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\},$$

即

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.



2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X = i, Y = j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\Leftrightarrow P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},$$

即 $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$.



(2) 设连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则有

$$X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

(3) X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.



例1 对于第一节例2中的随机变量 X 和 Y , 由于

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

得 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$

因而 X 和 Y 是相互独立的.



例2 若 X, Y 具有联合分布率

$Y \backslash X$	0	1	$P\{Y = j\}$
1	$1/6$	$2/6$	$1/2$
2	$1/6$	$2/6$	$1/2$
$P\{X = i\}$	$1/3$	$2/3$	1

则有 $P\{X = 0, Y = 1\} = 1/6 = P\{X = 0\}P\{Y = 1\},$

$$P\{X = 0, Y = 2\} = 1/6 = P\{X = 0\}P\{Y = 2\},$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = 2/6 = P\{X = 1\}P\{Y = 1\},$$

$$P\{X = 1, Y = 2\} = 2/6 = P\{X = 1\}P\{Y = 2\},$$

考察二维正态随机变量 (X, Y) .

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

结论:

对于二维正态随机变量 (X, Y) , X 和 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$.

例3 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟 ($1/12$ 小时)的概率.

解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间,
由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

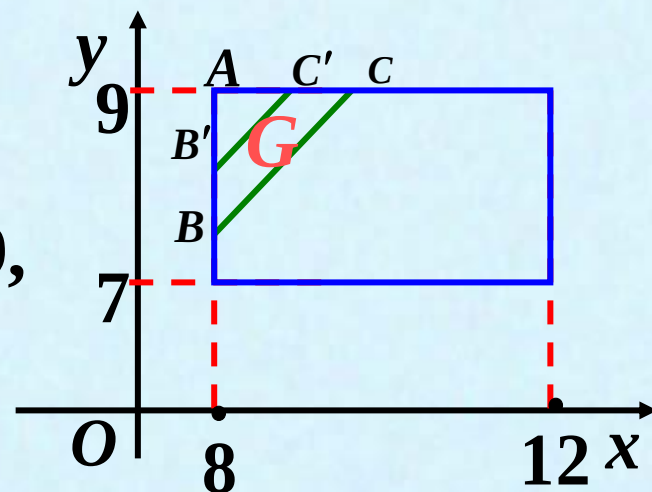


$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 8 < x < 12, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

因为 X, Y 相互独立, 故 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8}, & 8 < x < 12, 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

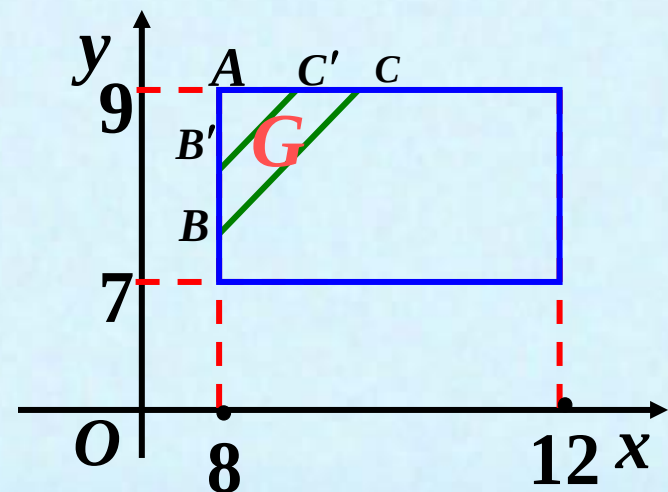


按题意需要求概率 $P\{|X - Y| \leq 1/12\}$. 画出区域:

$|x - y| \leq 1/12$, 以及长方形 $[8 < x < 12; 7 < y < 9]$, 它们的公共部分是四边形 $BCC'B'$, 记为 G .

显然仅当 (X, Y) 取值于 G 内, 他们两人到达的时间相差才不超过 $1/12$ 小时. 因此, 所求的概率为

$$\begin{aligned} P\{|X - Y| \leq \frac{1}{12}\} \\ &= \iint_G f(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{8} \times (G \text{ 的面积}). \end{aligned}$$



而 G 的面积

= 三角形 ABC 的面积 - 三角形 $AB'C'$ 的面积

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{13}{12} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{11}{12} \right)^2 = \frac{1}{6}.$$

于是 $P\{|X - Y| \leq \frac{1}{12}\} = \frac{1}{8} \times (G \text{ 的面积}) = \frac{1}{48}.$

即负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为 $\frac{1}{48}.$

补充例题



二、二维随机变量的推广

1. 分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为任意实数.



2. 概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 使对于任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 有

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率密度函数.



3.边缘分布函数

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为已知, 则 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的 k ($1 \leq k < n$)维边缘分布函数就随之确定. 例如 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 关于 X_1 、关于 (X_1, X_2) 的边缘分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \dots, \infty)$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \dots, \infty).$$

4. 边缘概率密度函数

若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率密度, 则 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 关于 X_1 , 关于 (X_1, X_2) 的边缘概率密度分别为

$$\begin{aligned} & f_{X_1}(x_1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n, \\ & f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_3 dx_4 \cdots dx_n. \end{aligned}$$



同理可得 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的 k ($1 \leq k < n$) 维边缘概率密度.

5. 相互独立性

若对于所有的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立的.



若对于所有的 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ 有

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) F_2(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

其中 F_1, F_2, F 依次为随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 、
 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 和 $(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 的分布
函数, 则称随机变量 $(X_1, \dots, X_m)$ 和 $(Y_1, \dots, Y_n)$ 是相互
独立的.



6.重要结论

定理 设 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 相互独立, 则 $X_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 和 $Y_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 相互独立. 又若 h, g 是连续函数, 则 $h(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 相互独立.



三、小结

1. 若离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X = i, Y = j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots.$$

X 和 Y 相互独立 $\iff$

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$f(x, y)$, 边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则有

$$X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立} \iff f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$



3. X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

4. 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 则有

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx \\ &= \int_{-\infty}^x [f(x, y) / f_Y(y)] dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y|x) &= \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(y|x) dy \\ &= \int_{-\infty}^y [f(x, y) / f_X(x)] dy. \end{aligned}$$



第五节 两个随机变量的函数的分布

- 一、问题的引入
- 二、离散型随机变量函数的分布
- 三、连续型随机变量函数的分布
- 四、小结

一、问题的引入

有一大群人, 令 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重, Z 表示该人的血压, 并且已知 Z 与 X, Y 的函数关系 $Z = g(X, Y)$, 如何通过 X, Y 的分布确定 Z 的分布.

**为了解决类似的问题下面
我们讨论随机变量函数的分布.**



二、离散型随机变量函数的分布

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij} \quad k = 1, 2, \dots$$



三、连续型随机变量函数的分布

(一) $Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 它具有概率密度 $f(x, y)$. 则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) dy, \quad (5.1)$$

或
$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx. \quad (5.2)$$

又若 X 和 Y 相互独立, 设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘

密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则(5.1),(5.2)分别化为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy, \quad (5.3)$$

和 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx. \quad (5.4)$

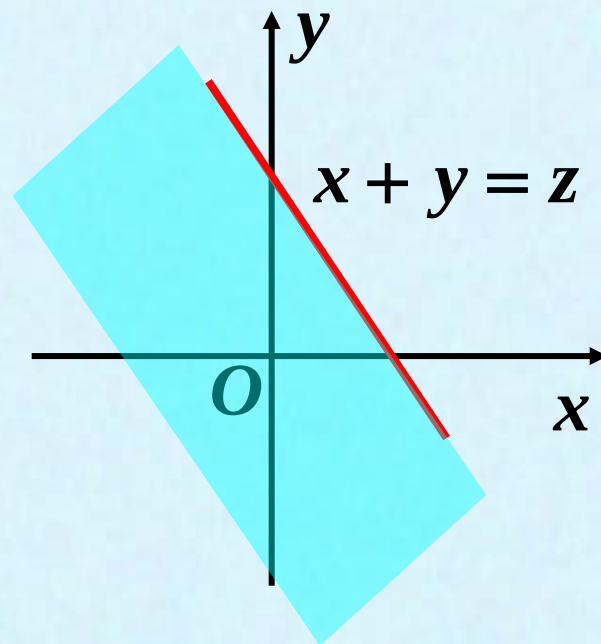
这两个公式称为 f_X 和 f_Y 的卷积公式, 记为 $f_X * f_Y$,

即
$$\begin{aligned} f_X * f_Y &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx. \end{aligned}$$

证 先来求 $Z = X + Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$, 即有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} \\ &= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

这里积分区域 $G: x + y \leq z$ 是
直线 $x + y = z$ 及其左下方的
半平面.



将二重积分化成累次积分, 得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \right] dy.$$



固定 z 和 y 对积分 $\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx$ 作变量变换, 令

$x = u - y$, 得

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^z f(u - y, y) du$$

于是

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^z f(u - y, y) du \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u - y, y) dy \right] du. \end{aligned}$$

由概率密度的定义即得(5.1)式. 类似可证得(5.2)式.



例1 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量. 他们都服从 $(0,1)$ 分布, 其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 由(5.4)式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx,$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} dx,$$

令 $t = x - \frac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.



说明

一般, 设 X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 由(5.4)式经过计算知 $Z = X + Y$ 仍然服从正态分布, 且有 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.



有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.



例2 在一简单电路中,两电阻 R_1 和 R_2 串联连接, 设 R_1, R_2 相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求电阻 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度.

解 由(5.4)式, R 的概率密度为

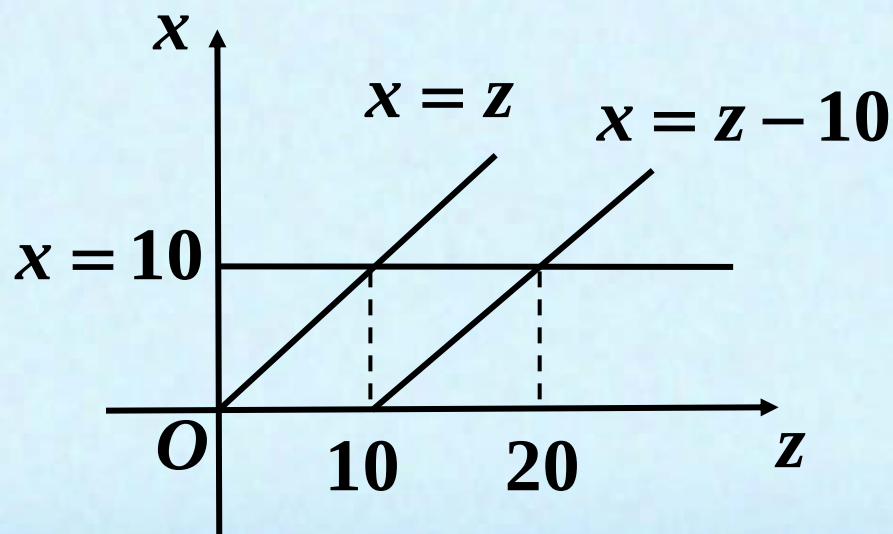
$$f_R(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(z-x) dx.$$



易知仅当

$$\begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零. 参考下图, 即得



$$f_R(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x) f(z-x) dx, & 0 \leq z < 10, \\ \int_{z-10}^{10} f(x) f(z-x) dx, & 10 \leq z \leq 20, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

将 $f(x)$ 的表达式代入上式得

$$f_R(z) = \begin{cases} \frac{1}{15000} (600z - 60z^2 + z^3), & 0 \leq z < 10, \\ \frac{1}{15000} (20-z)^3, & 10 \leq z < 20, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



例3 设随机变量 X, Y 相互独立, 且分别服从参数为 $\alpha, \theta; \beta, \theta$ 的 Γ 分布(分布分别记成 $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \theta)$), X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \alpha > 0, \theta > 0,$$



$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-y/\theta}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \beta > 0, \theta > 0.$$

试证明 $Z = X + Y$ 服从参数为 $\alpha + \beta, \theta$ 的 Γ 分布,
即 $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \theta)$.

证 由(5.4)式 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

易知仅当

$$\begin{cases} x > 0, \\ z - x > 0, \end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < z, \end{cases}$$

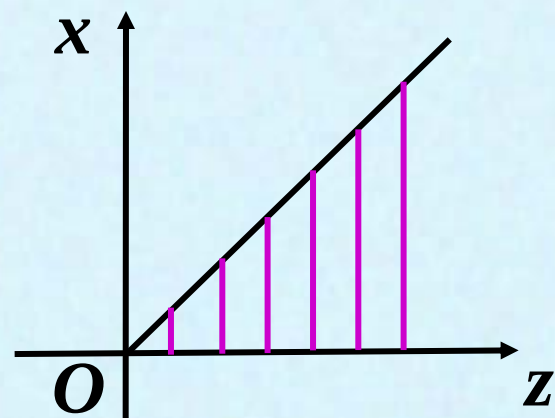
时上述积分的被积函数不等于零, 于是(参见下图)

知当 $z < 0$ 时 $f_z(z) = 0$,

而当 $z > 0$ 时有

$$f_z(z)$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-(z-x)/\theta} dx$$



$$= \frac{e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1} (z-x)^{\beta-1} dx \quad (\text{令 } x = zt)$$

$$= \frac{z^{\alpha+\beta-1} e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

$$\stackrel{\text{记成}}{=} Az^{\alpha+\beta-1} e^{-z/\theta},$$

$$\text{其中 } A = \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad (5.5)$$

现在来计算A. 由概率密度的性质得到:



$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) dz = \int_0^{\infty} A z^{\alpha+\beta-1} e^{-z/\theta} dz \\
 &= A \theta^{\alpha+\beta} \int_0^{\infty} (z/\theta)^{\alpha+\beta-1} e^{-z/\theta} d(z/\theta) \\
 &= A \theta^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha + \beta),
 \end{aligned}$$

即有
$$A = \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha + \beta)}.$$

于是
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha + \beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-z/\theta}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (5.6)$$

即
$$X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \theta).$$



上述结论还能推广到 n 个相互独立的 Γ 分布变量之和的情况.即若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立,且 X_i 服从参数为 $\alpha_i, \beta (i = 1, 2, \dots, n)$ 的 Γ 分布,则 $\sum_{i=1}^n X_i$ 服从参数为 $\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta$ 的 Γ 分布. 这一性质称为 Γ 分布的可加性.



(二) $Z = \frac{Y}{X}$ 的分布、 $Z = XY$ 的分布

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 它具有概率密度 $f(x, y)$. 则 $Z = \frac{Y}{X}$, $Z = XY$ 仍为连续型随机变量, 其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx,$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx.$$

如果 X 和 Y 相互独立 设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$, 则

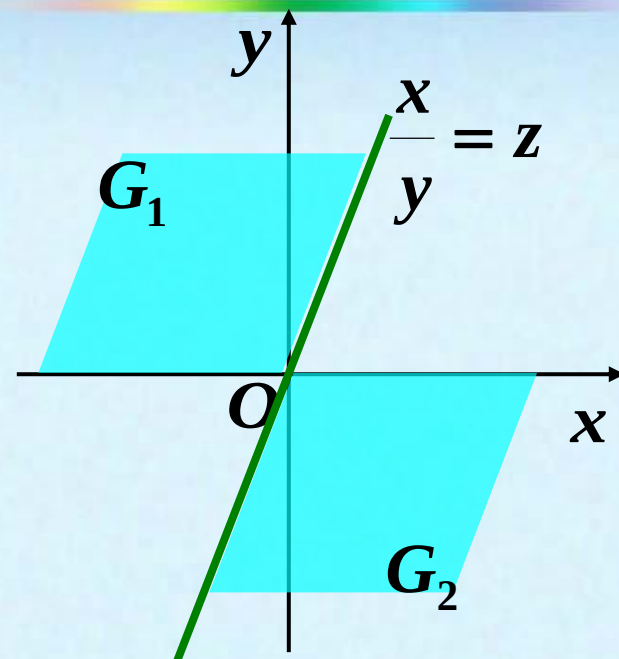
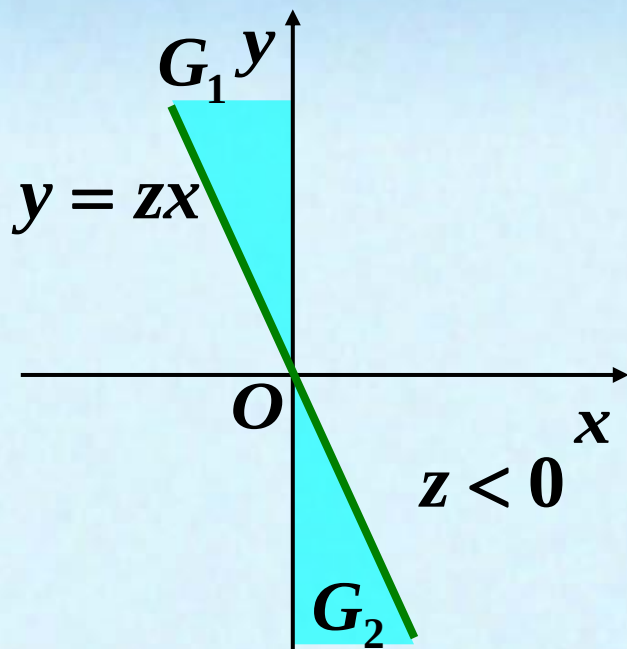
$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx. \quad (5.7)$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx. \quad (5.8)$$

证 $Z = \frac{Y}{X}$ 的分布函数为 $F_{Y/X}(z)$



3.5 两个随机变量的函数的分布



$$F_{Y/X}(z) = P\{Y/X \leq z\} = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x, y) dx dy$$

$$= \iint_{y/x \leq z, x < 0} f(x, y) dy dx + \iint_{y/x \leq z, x > 0} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 \int_{zx}^{\infty} f(x, y) dy dx + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{zx} f(x, y) dy dx$$



$$\begin{aligned}
& \text{令 } y=xu \int_{-\infty}^0 \int_z^{-\infty} xf(x, xu) du dx + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^z xf(x, xu) du dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z (-x) f(x, xu) du dx + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^z xf(x, xu) du dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z |x| f(x, xu) du dx \\
&= \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xu) dx du
\end{aligned}$$

所以
$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx.$$

类似可得
$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx.$$

例4 某公司提供一种地震保险, 保险费 Y 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{25} e^{-y/5}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

保险赔付 X 的概率密度为

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

设 X, Y 相互独立, 求 $Z = Y/X$ 的概率密度.



解 由(5.7)式知,当 $z < 0$ 时, $f_Z(z) = 0$.

当 $z > 0$ 时, Z 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{5} e^{-x/5} \cdot \frac{xz}{25} e^{-xz/5} dx \\ &= \frac{z}{125} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x\left(\frac{1+z}{5}\right)} dx \\ &= \frac{z}{125} \frac{\Gamma(3)}{[(1+z)/5]^3} = \frac{2z}{(1+z)^3}. \end{aligned}$$



(三) $M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 现求

$M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数.

由于 $M = \max\{X, Y\}$ 不大于 z 等价于 X 和 Y 都不大于 z , 故有

$$P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\}$$

又由于 X, Y 相互独立, 得到 $M = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为



$$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} \\ &= P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\}. \end{aligned}$$

即有 $F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z)$.

类似地, 可得 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\}. \end{aligned}$$

即 $F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$.



推广 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 及 $N = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)]$$



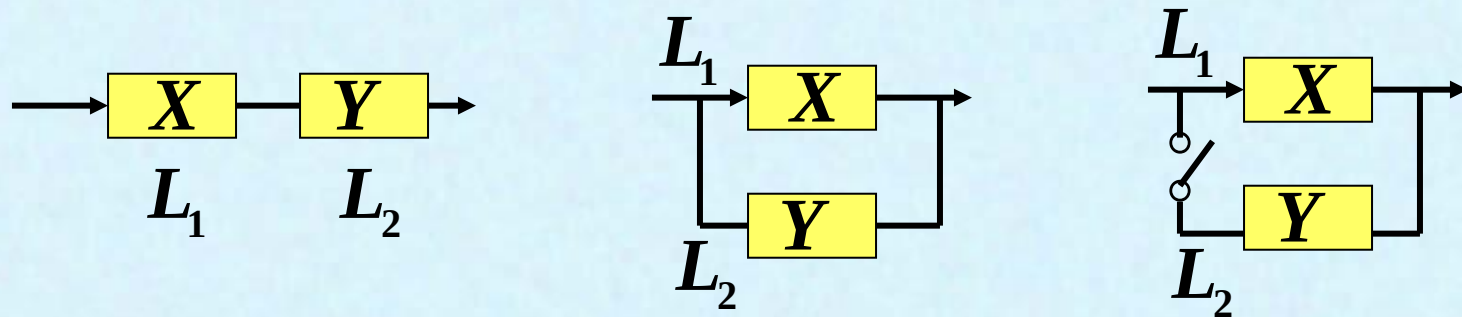
当 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$ 时有

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n,$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$



例5 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成, 连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用(当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y , 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 且 $\alpha \neq \beta$. 试分别就以上三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i) 串联的情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时, 系统 L 就停止工作, 所以这时 L 的寿命为



$$Z = \min\{X, Y\}.$$

X, Y 的分布函数分布为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \beta e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

$Z = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_{\min}(z) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$



$Z = \min\{X, Y\}$ 的概率密度为

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(ii) 并联的情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时, 系统 L 才停止工作, 所以这时 L 的寿命为 $Z = \max\{X, Y\}$.

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$



$Z = \max\{X, Y\}$ 的概率密度为

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha + \beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(iii) 备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 才开始工作, 因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 之和:

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时 $Z = X + Y$ 的概率密度为



$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\ &= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy \\ &= \alpha \beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy \\ &= \frac{\alpha \beta}{\beta - \alpha} [e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}]. \end{aligned}$$

当 $z \leq 0$ 时, $f(z) = 0$, 于是 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\alpha \beta}{\beta - \alpha} [e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

补充例题



四、小 结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$\begin{aligned} P\{Z = z_k\} &= P\{g(X, Y) = z_k\} \\ &= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$



2. 连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$ 的分布

(2) $Z = \frac{Y}{X}$ 的分布

(3) $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

