

《概率论与数理统计》模拟试卷 4 参考答案

一、单选题

1. 若随机事件 A 与 B 相互独立, 则 $P(A \cup B) =$ (B).
A. $P(A) + P(B)$ B. $P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
C. $P(A)P(B)$ D. $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$
2. 设 $X \sim N(\mu, 81)$, $Y \sim N(\mu, 16)$, 记 $p_1 = P\{X \leq \mu - 9\}$, $p_2 = P\{Y \geq \mu + 4\}$, 则 (B).
A. $p_1 < p_2$ B. $p_1 = p_2$ C. $p_1 > p_2$ D. p_1 与 p_2 的关系无法确定
3. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 令 $Y = -2X + 3$, 则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为 (B).
A. $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y-3}{2})$ B. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y-3}{2})$ C. $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y+3}{2})$ D. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y+3}{2})$
4. 若随机变量 X 的均值和方差都存在, 则 $E\{D[X + D(X)]\} =$ (C).
A. EX B. $(EX)^2$ C. DX D. $E(X^2)$
5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 、 S 分别是样本均值与样本标准差, 则 (D).
A. $\bar{X} \sim N(0, 1)$ B. $n\bar{X} \sim N(0, 1)$
C. $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ D. $\frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 甲、乙两人独立地对同一目标进行射击, 他们能击中目标的概率分别是 0.8, 0.6, 则目标被击中的概率为 0.92.
2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline P & 0.2 & 0.8 \end{array}$, $\begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline P & 0.5 & 0.5 \end{array}$, 则 $P(X=Y) = \underline{0.5}$.

3. 若 $X \sim N(1,4)$, $Y \sim N(1,9)$ 且 $\rho_{XY} = 0.45$, 则 $\text{Cov}(X,Y) = \underline{2.7}$.

4. 随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Ax^2 & (0 \leq x \leq 2), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$ 则系数 $A = \underline{\frac{3}{8}}$.

5. 设女生身高 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 4$, μ 未知, 随机抽查 16 名女生, 得 $\bar{x} = 162.67$, 则女生平均身高 EX 的 95% 的置信区间为 (161.69, 163.65).

($z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.65$).

三、证明题.

1. 设 X 的 $D(X) < \infty$, C 为常数, 证明: $D(X) \leq E[(X-C)^2]$.

证明: 对任意常数 C 有

$$\begin{aligned} E[(X-C)^2] &= E(X^2 - 2CX + C^2) \\ &= E(X^2) - 2CE(X) + C^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 + \{[E(X)]^2 - 2CE(X) + C^2\} \\ &= D(X) + (E(X) - C)^2 \geq D(X), \quad \text{且当 } E(X) = C \text{ 时取等号.} \end{aligned}$$

2. 设 $X \sim b(n_1, p)$, $Y \sim b(n_2, p)$, 且 X, Y 相互独立, 求证 $X+Y \sim b(n_1+n_2, p)$.

证明: 因为 $X \sim b(n_1, p)$, $Y \sim b(n_2, p)$,

$$P(X = k_1) = C_{n_1}^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n_1-k_1} (k_1 = 0, 1, \dots, n_1),$$

$$P(Y = k_2) = C_{n_2}^{k_2} p^{k_2} (1-p)^{n_2-k_2} (k_2 = 0, 1, \dots, n_2),$$

又 X, Y 相互独立, 则对 $\forall$ 整数 k , $0 \leq k \leq n_1 + n_2$, 有

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=1}^{n_1+n_2} P(X=i, Y=k-i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1+n_2} P(X=i)P(Y=k-i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1+n_2} C_{n_1}^i p^i (1-p)^{n_1-i} C_{n_2}^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-k+i} \\ &= \sum_{i=1}^{n_1+n_2} C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i} \\
&= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} C_{n_1+n_2-k}^k .
\end{aligned}$$

所以 $X+Y \sim b(n_1+n_2, p)$.

四、计算题.

1. 某厂有甲、乙、丙三条流水线生产同一产品，它们的产量之比为3:2:1，各流水线生产的产品不合格率依次为8%、9%、12%，现从该厂产品中任意抽取一件，问：

(1) 所取的产品为不合格品的概率；(2) 若取到的是不合格品，求它是由流水线乙生产的概率.

解：设事件 A_1, A_2, A_3 分别表示取到的产品由甲、乙、丙三条流水线生产生产，事件 B 表示取到的是不合格品，则根据题意有

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{3}, P(A_3) = \frac{1}{6},$$

$$P(B|A_1) = 0.08, P(B|A_2) = 0.09, P(B|A_3) = 0.12.$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\
&= \frac{1}{2} \times 0.08 + \frac{1}{3} \times 0.09 + \frac{1}{6} \times 0.12 = 0.09.
\end{aligned}$$

由贝叶斯公式得

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.03}{0.09} = \frac{1}{3} \approx 0.333.$$

2. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元，发生一次故障可获利润 5 万元；发生二次故障所获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内的期望利润是多少？

解：设 X 表示一周内的故障次数， Q (单位万元) 表示一周内的利润，则由题意得 X, Q 的

分布律分别为

$$X \sim b(5, 0.2),$$

$$\begin{pmatrix} Q & 10 & 5 & 0 & -2 \\ P & X=0 & X=1 & X=2 & X \geq 3 \end{pmatrix}.$$

又由 X 的分布律得

$$P\{Q=10\} = P\{X=0\} = C_5^0 0.2^0 0.8^5 = 0.8^5 = 0.32768,$$

$$P\{Q=5\} = P\{X=1\} = C_5^1 0.2^1 0.8^4 = 0.8^4 = 0.4096,$$

$$P\{Q=0\} = P\{X=2\} = C_5^2 0.2^2 0.8^3 = 0.4 \times 0.8^3 = 0.2048,$$

$$P\{Q=-2\} = P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 0.05792,$$

所以一周内的期望利润为

$$E(Q) = 10 \times 0.32768 + 5 \times 0.4096 - 2 \times 0.05792 = 5.20896.$$

3. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ ($x=0, 1, \dots$), 其中 $\lambda > 0$ 为未知

参数, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ 是一组样本值, 求参数 λ 的矩估计和最大似然估计.

解: 似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!} (x_i = 0, 1, \dots)$$

对数似然函数为

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda + \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!},$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i = 0, \text{ 得}$$

$$\hat{\lambda}_{MLE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}.$$

又

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda,$$

令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E(X),$$

得

$$\hat{\lambda}_{\text{矩}} = \bar{X}.$$

4. 某厂生产铜丝，生产一向稳定，现从其产品中随机抽取 10 段检查其折断力，测得

$$\bar{x} = 287.5, \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 160.5. \text{ 假定铜丝的折断力服从正态分布，问在显著水平}$$

$\alpha = 0.1$ 下，是否可以相信该厂生产的铜丝折断力的方差为 16？

$$(\text{已知: } \chi^2_{0.05}(10) = 18.31, \chi^2_{0.95}(10) = 3.94; \chi^2_{0.05}(9) = 16.9, \chi^2_{0.95}(9) = 3.33)$$

解：设铜丝的折断力 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ, σ^2 未知，提出假设

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 16, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 16.$$

取检验统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

其中 n, S^2 分别为样本容量和样本方差，拒接域为

$$\chi^2 \leq \chi^2_{0.95}(8) = 3.33 \text{ 或 } \chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(8) = 16.92,$$

代入数据计算得

$$\chi^2_{0.95}(8) < \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{160.5}{16} \approx 10.031 < \chi^2_{0.05}(8),$$

所以在该显著水平不能拒接原假设，即认为该厂生产的铜丝折断力的方差为 16.

5. 某地区 1996 年—2000 年居民消费支出和收入金额资料如下：

收入 x (亿元)	64	70	77	82	92
消费支出 y (亿元)	56	60	66	75	88

试建立该地区消费支出 y 对收入 x 的直线回归方程？

解：设支出 y 对收入 x 的直线回归方程为

$$y = a + bx,$$

记

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right)^2,$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right) \left(\sum_{i=1}^5 y_i \right),$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^5 y_i^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 y_i \right)^2,$$

$$\text{其中, } \bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i,$$

代入数据计算得

$$\bar{x} = 77, \bar{y} = 69, \quad \hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{547}{468} \approx 1.169, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx -20.998$$

所以售价 y 对楼盘面积 x 的直线回归方程为

$$y = -20.998 + 1.169x.$$