

《线性代数》模拟试卷（十八）答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是().

- A. $k \neq -1$ B. $k \neq 3$ C. $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$ D. $k \neq -1$ 或 $k \neq 3$

答案: C.

2. 设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $X = (\quad)$.

- A. $\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$

答案: B.

3. 设矩阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 且 $|A| > 0$, 则 $A = (\quad)$.

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

答案: A.

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, 存在可逆矩阵 P , 使得 PA 为 A 的行最简形矩阵, 则矩阵

P 为().

- A. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

答案: D.

5. 设向量组 $\alpha_1 = (a, 0, c)^T$, $\alpha_2 = (b, c, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, a, b)^T$, 若常数 a, b, c 满足 $abc = 0$,

则该向量组的秩 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\quad)$.

A. 无法确定

B. >3

C. $=3$

D. <3

答案: D.

6. 设 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 则下面成立的是 ().

A. $2\eta_1 - 3\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

B. $3\eta_1 - 2\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

C. $\eta_1 + \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

D. $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解

答案: B.

二、填空题 (每小空 3 分, 共 12 分)

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ 的解 x 为_____.

答案: $x=2$ $x=3$. 2. 已知 4 阶方阵 A 的行列式 $|A|=8$, $B=\frac{1}{2}A$, 则 $|B|$ =_____.

答案: $\frac{1}{2}$.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则矩阵 A 的最高阶非零子式的阶数是_____.

答案: 2.

4. 求向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的一个最大线性无关组_____.

答案: α, β 或 α, γ 或 β, γ .

三、计算题 (共 8 小题, 共 70 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= 5 \quad (7 \text{ 分})$$

$$2. \text{ 设 } D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ 求 } A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} \text{ 的值. } (8 \text{ 分})$$

$$\text{解: } A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= -18 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \quad (7 \text{ 分})$$

$$3. \text{ 解矩阵方程 } \mathbf{AX} = \mathbf{B}, \text{ 其中 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{解: } (A, B) &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{即 } X = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$4. \text{ 设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 问 } a \text{ 为何值时, } R(A)=2; a \text{ 为何值时, } R(A)=3. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 2-a \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, } R(A)=2 \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{当 } a=2 \text{ 时, } R(A)=3 \quad (6 \text{ 分})$$

$$5. \text{ 设线性方程组 } \begin{cases} x_1 + (\lambda - 1)x_2 - 2x_3 = 1 \\ (\lambda - 2)x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 3 \\ (2\lambda + 1)x_3 = 5 \end{cases}, \text{ 讨论 } \lambda \text{ 取何值时, (1) 方程组无解?}$$

(2) 有唯一解? (3) 有无穷多解? 在方程组有无穷多解时, 求其通解. (12 分)

解: 对增广矩阵 $B = (A, b)$ 作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵, 有

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda+1 & 3 \\ 0 & 0 & 2\lambda+1 & 5 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

(1) 当 $\lambda = -\frac{1}{2}$ 时, $R(\mathbf{A}) \neq R(\mathbf{B})$, 方程组无解; (2 分)

(2) 当 $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ 且 $\lambda \neq 2$ 时, $R(\mathbf{A}) \neq R(\mathbf{B}) = 3$ 方程组有唯一解; (4 分)

(3) 当 $\lambda = 2$ 时, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = 2$ 方程组有无穷多解, 这时, (6 分)

$$\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8 \text{ 分})$$

由此便得通解 $\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ (x_2 可任意取值). (10 分)

$$\text{即 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbf{R} \text{ 可任意取值}) \quad (12 \text{ 分})$$

6. 设四元非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵的秩 $R(\mathbf{A}) = 2$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的三个解向量, 且 $\boldsymbol{\eta}_1 = (4, 3, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1, 3, 5, 1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (-2, 6, 3, 2)^T$ 求 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解. (8 分)

解: 已知方程组是四元, 且 $R(\mathbf{A}) = 2$, 则由非齐次线性方程组解的结构知, 导出组的基础解系中含有两个解向量, 设为 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ (2 分)

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2 = (4, 3, 2, 1)^T - (1, 3, 5, 1)^T = (3, 0, -3, 0)^T \quad (4 \text{ 分})$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3 = (4, 3, 2, 1)^T - (-2, 6, 3, 2)^T = (6, -3, -1, -1)^T \quad (6 \text{ 分})$$

又因为非齐次线性方程组有特解 $\boldsymbol{\eta}_1 = (4, 3, 2, 1)^T$ (7 分)

则非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}_1 + k_1 \boldsymbol{\xi}_1 + k_2 \boldsymbol{\xi}_2$, $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ (8 分)

7. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3+a \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4+a \end{pmatrix}$, 问 a 为何值

时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时求一个最大线性无关组, 并将其余向量用该最大线性无关组线性表示. (12 分)

解: 设 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$ (3 分)

$$= \begin{vmatrix} 10+a & 2 & 3 & 4 \\ 10+a & 2+a & 3 & 4 \\ 10+a & 2 & 3+a & 4 \\ 10+a & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$$

$$= (10+a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$$

$$= (10+a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= (10+a)a^3 \quad (5 \text{ 分})$$

当 $a=0$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

α_1 为最大线性无关组, $\alpha_2 = 2\alpha_1$, $\alpha_3 = 2\alpha_1$, $\alpha_4 = 4\alpha_1$ (7 分)

当 $a=-10$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关,

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ -9 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 20 & 30 & -50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为最大线性无关组, $\alpha_4 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$. (12 分)

8. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (9 分)

解: A 的特征多项式为 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(2+\lambda)$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ (3 分)

当 $\lambda_1 = 4$ 时, 解方程 $(A - 4E)x = 0$. 由

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量为 $k\alpha_1$ (常数 $k \neq 0$). (6 分)

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 解方程 $(A + 2E)x = 0$. 由

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, -5)^T$.

从而对应于特征值 $\lambda_2 = -2$ 的全部特征向量为 $k\alpha_2$ (常数 $k \neq 0$). (9 分)