

第一节 数学期望

- 一、数学期望的概念
- 二、随机变量函数的数学期望
- 三、数学期望的性质
- 四、小结

一、数学期望的概念

引例1 分赌本问题(产生背景)

A, B 两人赌技相同, 各出赌金100元, 并约定先胜三局者为胜, 取得全部 200 元. 由于出现意外情况, 在 A 胜 2 局 B 胜1 局时, 不得不终止赌博, 如果要分赌金, 该如何分配才算公平?



分析 假设继续赌两局,则结果有以下四种情况:

AA	AB	BA	BB
A 胜 B 负	A 胜 B 负	B 胜 A 负	B 胜 A 负
A 胜 B 负	B 胜 A 负	A 胜 B 负	B 胜 A 负

把已赌过的三局(A 胜2局 B 胜1局)与上述结果相结合,即 A 、 B 赌完五局,

前三局: A 胜 2 局 B 胜 1 局

后二局:

AA	AB	BA	BB
A 胜			B 胜



故有, 在赌技相同的情况下, A, B 最终获胜的可能性大小之比为 $3:1$,

即 A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$, 而 B 只能获得赌金的 $\frac{1}{4}$.

因此, A 能“期望”得到的数目应为

$$200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}),$$

而 B 能“期望”得到的数目, 则为

$$200 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 50(\text{元}).$$



若设随机变量 X 为: 在 A 胜2局 B 胜1局的前提下,
继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则 X 所取可能值为: 200 0

其概率分别为: $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

因而 A 期望所得的赌金即为 X 的 “期望” 值,

等于 $200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}).$

即为 X 的可能值与其概率之积的累加.

引例2 射击问题

设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次(命中的环数是一个随机变量).射中次数记录如下



命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问: 该射手每次射击平均命中靶多少环?



解 平均射中环数 = $\frac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{0 \times 2 + 1 \times 13 + 2 \times 15 + 3 \times 10 + 4 \times 20 + 5 \times 30}{90} \\ &= 0 \times \frac{2}{90} + 1 \times \frac{13}{90} + 2 \times \frac{15}{90} + 3 \times \frac{10}{90} + 4 \times \frac{20}{90} \\ &\quad + 5 \times \frac{30}{90} \\ &= \sum_{k=0}^5 k \cdot \frac{n_k}{n} = 3.37. \end{aligned}$$

设射手命中的环数为随机变量 Y .



$$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^5 k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}} \rightarrow \text{频率随机波动}$$

↓ 随机波动

“平均射中环数”的稳定值= ?

$$\sum_{k=0}^5 k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^5 k \cdot p_k$$

↓

随机波动

→

↓

稳定值

“平均射中环数”等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

若级数
$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的

数学期望, 记为 $E(X)$. 即
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$



分赌本问题

A 期望所得的赌金即为 X 的数学期望

$$E(X) = 200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}).$$

射击问题

“平均射中环数” 应为随机变量 Y 的数学期望

$$E(Y) =$$

$$0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + 4 \times p_4 + 5 \times p_5.$$



关于定义的几点说明

(1) $E(X)$ 是一个实数, 而非变量, 它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同, 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**, 也称均值.

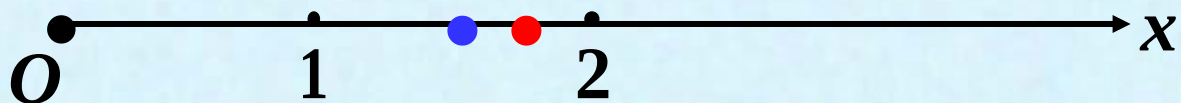
(2) **级数的绝对收敛性**保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变, 之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量 X 取可能值的平均值, 它不应随可能值的排列次序而改变.



假设	X	1	2
	p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\frac{1+2}{2} = 1.5$,

$$E(X) = 1 \times 0.02 + 2 \times 0.98 = 1.98.$$



它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的平均值.
当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时, X 的期望值与算术平均值相等.



例1 某医院当新生儿诞生时,医生要根据婴儿的皮肤颜色、肌肉弹性、反应的敏感性、心脏的搏动等方面的情况进行评分,新生儿的得分 X 是一个随机变量.据以往的资料表明 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0.002	0.001	0.002	0.005	0.02	0.04	0.18	0.37
	8	9	10					
	0.25	0.12	0.01					

试求 X 的数学期望 $E(X)$.



解
$$\begin{aligned} E(X) = & 0 \times 0.002 + 1 \times 0.001 + 2 \times 0.002 \\ & + 3 \times 0.005 + 4 \times 0.02 + 5 \times 0.04 \\ & + 6 \times 0.18 + 7 \times 0.37 + 8 \times 0.25 \\ & + 9 \times 0.12 + 10 \times 0.01 = 7.15 \text{ (分)} \end{aligned}$$

结果表明, 若考察医院出生的很多新生儿, 例如1000个, 那么一个新生儿的平均得分约7.15分, 1000个新生儿共得分7150分.



例2 有两个相互独立工作的电子装置, 它们的寿命 $X_k (k = 1, 2)$ 服从同一指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \theta > 0.$$

若将这两个电子装置串联联接成整机, 求整机寿命 (以小时记) N 的数学期望.

解 $X_k (k = 1, 2)$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



$N = \min\{X_1, X_2\}$ 的分布函数为

$$F_{\min}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

因而 N 的概率密度为

$$f_{\min}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} e^{-2x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

于是 N 的数学期望为

$$E(N) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\min}(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{2x}{\theta} e^{-2x/\theta} dx = \frac{\theta}{2}.$$



例3 按规定, 某车站每天 8:00 ~ 9:00, 9:00 ~ 10:00 都恰有一辆客车到站, 但到站的时刻是随机的, 且两者到站的时间相互独立. 其规律为

到站时刻	8:10	8:30	8:50
	9:10	9:30	9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$



一旅客 8:20 到车站, 求他候车时间的数学期望.

解 设旅客的候车时间为 X (以分计). X 的分布



律为	X	10	30	50	70	90
	p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$

在上表中, 例如

$$P\{X = 70\} = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6}.$$

其中A为事件“第一班车在8:10到站”, B为“第二班车在9:30到站”. 候车时间的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= 10 \times \frac{3}{6} + 30 \times \frac{2}{6} + 50 \times \frac{1}{36} + 70 \times \frac{3}{36} + 90 \times \frac{2}{36} \\ &= 27.22 \text{ (分)} \end{aligned}$$



例4 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式, 记使用寿命为 X (以年计), 规定:

$X \leq 1$, 一台付款1500元;

$1 < X \leq 2$, 一台付款2000元;

$2 < X \leq 3$, 一台付款2500元;

$X > 3$, 一台付款3000元.

设寿命 X 服从指数分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



试求该商店一台这种家用电器收费 Y 的数学期望.

解 先求出寿命 X 落在各个时间区间的概率. 即有

$$P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$$

$$\begin{aligned} P\{1 < X \leq 2\} &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx \\ &= e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861, \end{aligned}$$

$$P\{2 < X \leq 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx$$



$$= e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx$$

$$= e^{-0.3} = 0.7408.$$

因而一台家用电器收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y) = 2732.15,$

即平均一台家用电器收费 2732.15 元.



例5 在一个人数很多的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血, 可以用两种方法进行:

- (i) 将每个人的血分别去化验, 这就需化验 N 次.
- (ii) 按 k 个人一组进行分组, 把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验, 如果这混合血液呈阴性反应, 就说明 k 个人的血都呈阴性反应, 这样, 这 k 个人的血就只需验一次. 若呈阳性, 则再对这 k 个人的血液分别进行化验, 这样, k 个人的血总共最多化验 $k + 1$ 次. 假设每个人化验呈阳性的概率为 p , 且

这些人的化验反应是相互独立的. 试说明当 p 较小时, 选取适当的 k , 按第二种方法可以减少化验的次数. 并说明 k 取什么值时最适宜.

解 各人的血呈阴性反应的概率为 $q = 1 - p$, 因而 k 个人的混合血呈阴性反应的概率为 q^k , k 个人的混合血呈阳性反应的概率为 $1 - q^k$.

设以 k 个人为一组时, **组内每人的血化验的次数为 X , 则 X 为一随机变量, 其分布律为**



X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的数学期望为

$$E(X) = \frac{1}{k}q^k + (1 + \frac{1}{k})(1 - q^k) = 1 - q^k + \frac{1}{k}.$$

N 个人平均需化验的次数 为

$$N(1 - q^k + \frac{1}{k}).$$



由此可知, 只要选择 k 使

$$1 - q^k + \frac{1}{k} < 1,$$



则 N 个人平均需化验的次数 $< N$.

当 p 固定时, 可选取 k 使得

$$L = 1 - q^k + \frac{1}{k}$$

小于1且取到最小值, 这时就能得到最好的分组方法.



例如, $p = 0.1$, 则 $q = 0.9$,

当 $k = 4$ 时, $L = 1 - q^k + \frac{1}{k}$ 取到最小值, 此时得到最

好的分组方法. 若 $N = 1000$, 此时以 $k = 4$ 分组, 则

按第二种方法平均只需化验

$$1000(1 - 0.9^4 + \frac{1}{4}) = 594 \text{ (次)}.$$

这样平均来说, 可以减少40%的工作量.



例6 设 $X \sim \pi(\lambda)$, 求 $E(X)$.

解 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0.$$

X 的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda, \end{aligned}$$

即 $E(X) = \lambda$.



2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若
积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 的值为随机变量
 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$



例7 设 $X \sim U(a, b)$, 求 $E(X)$.

解 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

X 的数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

即数学期望位于区间 (a, b) 的中点.



二、随机变量函数的数学期望

1. 离散型随机变量函数的数学期望

设随机变量 X 的分布律为

$X = x_k$	-1	0	1	2
$P\{X = x_k\} = p_k$	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y = g(X) = X^2$, 求 $E(Y)$.

解 先求 $Y = X^2$ 的分布律



$Y = X^2$	0	1	4
p	p_2	$p_1 + p_3$	p_4

则有 $E(Y) = E(g(X)) = E(X^2)$

$$= 0 \cdot p_2 + 1 \cdot (p_1 + p_3) + 4 \cdot p_4$$

$$= 0 \cdot p_2 + (-1)^2 \cdot p_1 + 1^2 \cdot p_3 + 2^2 \cdot p_4$$

$$= \sum_{k=1}^4 g(x_k) P\{X = x_k\}.$$



因此离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y = g(X)$, 且 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots,$

则有
$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k.$$

2. 连续型随机变量函数的数学期望

若 X 是连续型的, 它的分布密度为 $f(x)$, 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$



证明: 设 X 是连续型随机变量, 且 $y = g(x)$ 满足第二章第五节中定理的条件.

随机变量 $Y = g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)] |h'(y)| dy.$$

当 $h'(y)$ 恒 > 0 时,



$$E(Y) = \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)] h'(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

当 $h'(y)$ 恒 < 0 时,

$$\begin{aligned} E(Y) &= -\int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)] h'(y) dy \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} g(x) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \end{aligned}$$



3. 二维随机变量函数的数学期望

(1) 设 X, Y 为离散型随机变量, $g(x, y)$ 为二元函数, 则 $E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$.

其中 (X, Y) 的联合概率分布为 p_{ij} .

(2) 设 X, Y 为连续型随机变量, $g(x, y)$ 为二元函数, 则 $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$.

其中 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$.

例8 设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布, 即具有概率密度

$$f(v) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 < v < a, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数:

$W = kV^2$ ($k > 0$, 常数), 求 W 的数学期望.

解 $E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} kv^2 f(v) dv = \int_0^a kv^2 \frac{1}{a} dv = \frac{1}{3}ka^2.$



例9 设随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3 y^2}, & \frac{1}{x} < y < x, x > 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求数学期望 $E(Y), E(\frac{1}{XY})$.

解
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dy dx$$

$$= \int_1^{\infty} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{3}{2x^3 y} dy dx$$



$$= \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} [\ln y]_{\frac{1}{x}}^x dx = 3 \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$= \left[-\frac{3 \ln x}{2 x^2} \right]_1^{\infty} + \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \frac{3}{4}.$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{xy} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_1^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{3}{2x^4 y^3} dy = \frac{3}{5}.$$



例10 某公司计划开发一种新产品市场,并试图确定该产品的产量. 他们估计出售一件产品可获利 m 元, 而积压一件产品导致 n 元的损失. 再者, 他们预测销售量 Y (件) 服从指数分布, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \quad \theta > 0,$$

问若要获得利润的数学期望最大, 应生产多少件产品 (m, n, θ 均为已知)?

解 设生产 x 件, 则获利 Q 是 x 的函数:

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & Y < x, \\ mx, & Y \geq x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Q) &= \int_0^{\infty} Q f_Y(y) dy \\ &= \int_0^x [my - n(x - y)] \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy + \int_x^{\infty} mx \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy \\ &= (m + n)\theta - (m + n)\theta e^{-x/\theta} - nx, \end{aligned}$$

令 $\frac{d}{dx} E(Q) = (m + n)e^{-x/\theta} - n = 0,$

得 $x = -\theta \ln\left(\frac{n}{m + n}\right).$



$$\text{又 } \frac{d^2}{dx^2} E(Q) = \frac{-(m+n)}{\theta} e^{-x/\theta} < 0,$$

故知当 $x = -\theta \ln\left(\frac{n}{m+n}\right)$ 时, $E(Q)$ 取得极大值,且可

知这也是最大值.

$$\text{例如, 若 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10000} e^{-\frac{1}{10000}y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

且有 $m = 500$ 元, $n = 2000$ 元, 则

$$x = -10000 \ln\left(\frac{2000}{500 + 2000}\right) = 2231.4.$$

取 $x = 2231$ (件).



例11 某甲与其他三人参与一个项目的竞拍, 价格以千美元计, 价格高者获胜. 若甲中标, 他就将此项目以10千美元转让给他人. 可认为其他三人的竞拍价是相互独立的, 且都在7~11千美元之间均匀分布. 问甲应如何报价才能使获益的数学期望为最大(若甲中标必须将此项目以他自己的报价买下).



解 设 X_1, X_2, X_3 是其他三人的报价, 按题意 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且在区间(7,11)上服从均匀分布. 其分布函数为

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u < 7, \\ \frac{u-7}{4}, & 7 \leq u < 11, \\ 1, & u \geq 11. \end{cases}$$

以 Y 记三人最大出价, 即 $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.



Y 的分布函数为

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0, & u < 7, \\ \left(\frac{u-7}{4}\right)^3, & 7 \leq u < 11, \\ 1, & u \geq 11. \end{cases}$$

若甲的报价为 x , 按题意 $7 \leq x \leq 10$, 知甲能赢得这一项目的概率为

$$p = P\{Y \leq x\} = F_Y(x) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3, \quad (7 \leq x \leq 10).$$



以 $G(X)$ 记甲的赚钱数， $G(X)$ 是一个随机变量，

它的分布律为

$G(X)$	$10 - x$	0
概率	$\left(\frac{x-7}{4}\right)^3$	$1 - \left(\frac{x-7}{4}\right)^3$

于是甲赚钱的数学期望为

$$E[G(X)] = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 (10-x).$$

令
$$\frac{d}{dx} E[G(X)] = \frac{1}{4^3} [(x-7)^2 (37-4x)] = 0,$$



得 $x = \frac{37}{4}$, $x = 7$ (舍去).

又知 $\frac{d^2}{d^2 x} E[G(X)] \Big|_{x=37/4} < 0$.

故知当甲的报价为 $x = 37/4$ 千美元时, 他赚钱的数学期望达到极大值, 还可知这也是最大值.



三、数学期望的性质

1° 设 C 是常数, 则有 $E(C) = C$.

2° 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$E(CX) = CE(X).$$

3° 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

这一性质可以推广到任意有限个随机变量之和的情况.



证 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$.
其边缘概率密度为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

证毕.



4° 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

这一性质可以推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况.

证 又若 X, Y 相互独立,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x) f_Y(y)dx dy \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy \right] = E(X)E(Y). \end{aligned}$$



说明

连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.



例12 一民航送客车载有20位旅客自机场开出,旅客有10个车站可以下车. **如果到达一个车站没有旅客下车就不停车**,以 X 表示停车的次数,求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车,} \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$



易知
$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}.$$

现在来求 $E(X)$.

按题意,任一旅客在第*i*站不下车的概率为 $\frac{9}{10}$,

因此20位旅客都不在第*i*站下车的概率为 $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$,

在第*i*站有人下车的概率为 $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$,也就是

$$P\{X_i = 0\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, P\{X_i = 1\} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20},$$
$$i = 1, 2, \dots, 10.$$

由此 $E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \quad i = 1, 2, \dots, 10.$

进而
$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_{10}) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) \\ &= 10 \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \right] = 8.784(\text{次}). \end{aligned}$$



例13 设一电路中电流 $I(\text{A})$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$g(i) = \begin{cases} 2i, & 0 \leq i \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad h(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{9}, & 0 \leq r \leq 3, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

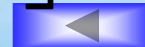
试求电压 $V = IR$ 的均值.

解

$$E(V) = E(IR) = E(I)E(R)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} ig(i)di \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)dr \right] \\ &= \left[\int_0^1 2i^2 di \right] \left[\int_0^3 \frac{r^3}{9} dr \right] = \frac{3}{2} (\text{V}). \end{aligned}$$

补充例题



四、小结

1. 数学期望是一个实数,而非变量,它是一种**加权平均**,与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

$$1^\circ E(C) = C.$$

$$2^\circ E(CX) = CE(X).$$

$$3^\circ E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

$$4^\circ X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立} \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y).$$

第二节 方 差

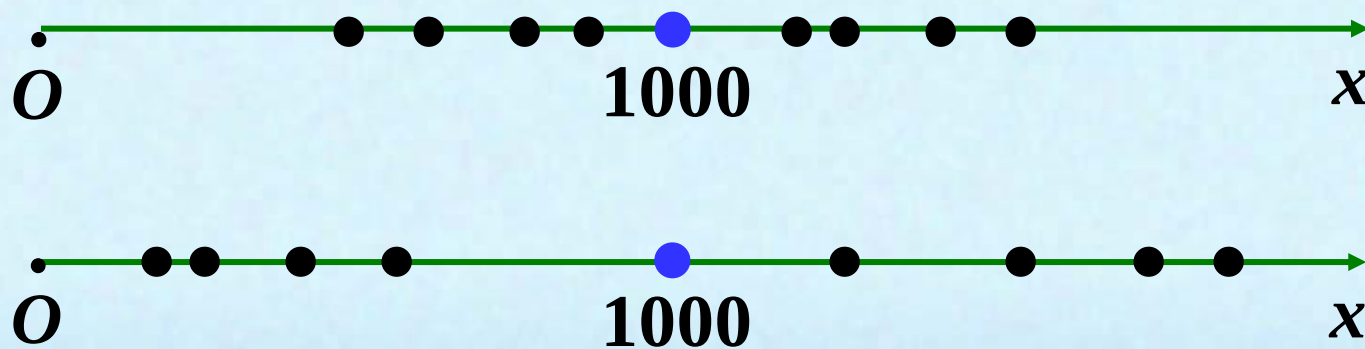
- 一、随机变量方差的概念及性质
- 二、重要概率分布的方差
- 三、例题讲解
- 四、小结

一、随机变量方差的概念及性质

1. 概念的引入

方差是一个常用来体现随机变量取值分散程度的量.

实例 有两批灯泡, 平均寿命都是 $E(X)=1000$ 小时.



2. 方差的定义

定义 设 X 是一个随机变量, 若 $\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 记为 $D(X)$ 或 $\text{Var}(X)$, 即

$$D(X) = \text{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\}.$$

在应用上还引入量 $\sqrt{D(X)}$, 记为 $\sigma(X)$, 称为标准差或均方差.

3. 方差的意义

按定义, 随机变量 X 的方差表达了 X 的取值与其数学期望的偏离程度. 若 $D(X)$ 较小意味着 X 的取值比较集中在 $E(X)$ 的附近, 反之, 若 $D(X)$ 较大则表示 X 的取值较分散. 因此, $D(X)$ 是刻画 X 取值分散程度的一个量, 它是衡量 X 取值分散程度的一个尺度.



4. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

对于离散型随机变量

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$ 是 X 的分布律.

对于连续型随机变量

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx,$$

其中 $f(x)$ 为 X 的概率密度.

(2) 利用公式计算

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

$$\begin{aligned}\text{证} \quad D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2.\end{aligned}$$



5. 方差的性质

1° 设 C 是常数, 则 $D(C) = 0$.

证 $D(C) = E\{[C - E(C)]^2\} = 0$.

2° 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$D(CX) = C^2 D(X), \quad D(X + C) = D(X).$$

证
$$\begin{aligned} D(CX) &= E\{[CX - E(CX)]^2\} \\ &= C^2 E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= C^2 D(X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X + C) &= E\{[X + C - E(X + C)]^2\} \\ &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= D(X). \end{aligned}$$

3° 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$\begin{aligned} &D(X + Y) \\ &= D(X) + D(Y) + 2E\{(X - E(X))(X - E(Y))\}. \end{aligned}$$

若 X, Y 相互独立, 则有

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

证

$$\begin{aligned} & D(X + Y) \\ &= E\{[(X + Y) - E(X + Y)]^2\} \\ &= E\{[X - E(X)] + [Y - E(Y)]\}^2 \\ &= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 \\ &\quad + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= D(X) + D(Y) + 2E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\}. \end{aligned}$$

上式右端第三项:

$$\begin{aligned} & 2E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\} \\ &= 2E\{XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= 2\{E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) \\ &\quad + E(X)E(Y)\} \\ &= 2\{E(XY) - E(X)E(Y)\}. \end{aligned}$$

若 X, Y 相互独立, 由数学期望的性质4°知道上式右端为0, 于是

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

这一性质可以推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和的情况.

推广 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 则有

$$D(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

(4) $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率1取常数 C ,

即

$$P\{X = C\} = 1.$$



二、重要概率分布的方差

1. 两点分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = pq.$$



2. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

则有

$$0 < p < 1.$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P\{X = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$



$$= \sum_{k=0}^n \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p + (1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$



$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$



3. 泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0.$$

则有

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E(X^2) &= E[X(X-1) + X] \\ &= E[X(X-1)] + E(X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

所以 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

泊松分布的期望和方差 都等于参数 λ .

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a, b)$, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则有
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx$$
$$= \frac{1}{2}(a+b).$$



结论 均匀分布的数学期望位于区间的中点.

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$



5. 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx \\ &= -x e^{-x/\theta} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x/\theta} dx = \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx \\ &= -x^2 e^{-x/\theta} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-x/\theta} dx \\ &= 2\theta^2. \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2.$$

指数分布的期望和方差 分别为 θ 和 θ^2 .

6. 正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, -\infty < x < +\infty.$$

先求标准正态变量 $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ 的数学期望和方差.

Z 的概率密度为 $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$,

$$\text{于是 } E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = \left. \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \right|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

$$D(Z) = E(Z^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$$

$$= 1,$$

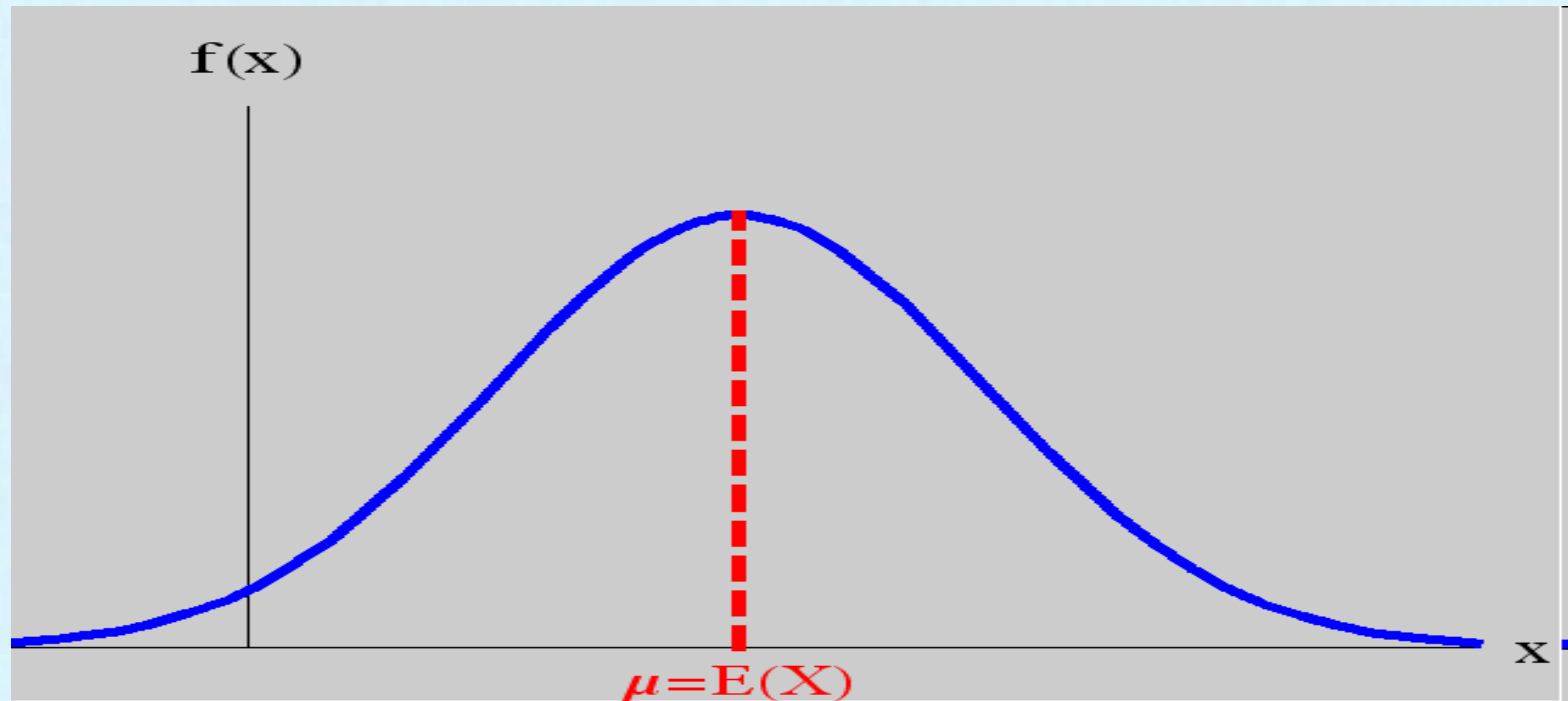
$$X = \mu + \sigma Z,$$

即得 $E(X) = E(\mu + \sigma Z) = \mu.$

$$D(X) = D(\mu + \sigma Z) = D(\sigma Z) = \sigma^2 D(Z) = \sigma^2.$$



正态分布的期望和方差 分别为两个参数 μ 和 σ^2 .



若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 且它们相互独立, 则它们的线性组合: $C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$ ($C_1, C_2, \dots, C_n$ 是不全为0的常数)仍然服从正态分布, 于是由数学期望和方差的性质知道

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^n C_i\mu_i, \sum_{i=1}^n C_i^2\sigma_i^2\right).$$

例如, 若 $X \sim N(1,3), Y \sim N(2,4)$ 且 X, Y 相互独立, 则 $Z = 2X - 3Y$ 也服从正态分布, 而

$$E(Z) = 2 \times 1 - 3 \times 2 = -4,$$

$$D(Z) = D(2X - 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 48.$$

故有 $Z \sim N(-4, 48)$.



分 布	参 数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	p	$p(1 - p)$
二项分布	$n \geq 1,$ $0 < p < 1$	np	$np(1 - p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$(a + b)/2$	$(b - a)^2/12$
指数分布	$\theta > 0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu, \sigma > 0$	μ	σ^2



三、例题讲解

例1 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$,

方差 $D(X) = \sigma^2 \neq 0$. 记 $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$,

则 $E(X^*) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} [E(X) - \mu] = 0;$

$$D(X^*) = E(X^{*2}) - [E(X^*)]^2$$

$$= E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2} E[(X - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

例2 设随机变量 X 具有(0-1)分布,其分布律为

$$P\{X = 0\} = 1 - p, \quad P\{X = 1\} = p.$$

求 $D(X)$.

解 $E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p,$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p,$$

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= p - p^2 = p(1 - p). \end{aligned}$$



例3 设 $X \sim \pi(\lambda)$, 求 $D(X)$.

解 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0.$$

上节例6已算得 $E(X) = \lambda$, 而

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E[X(X-1) + X] \\ &= E[X(X-1)] + E(X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

所以方差 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$.

泊松分布的期望和方差相等,都等于参数 λ .

例4 设 $X \sim U(a, b)$, 求 $D(X)$.

解 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

上节例7已算得 $E(X) = \frac{a+b}{2}$, **方差为**

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$



例5 设随机变量 X 服从指数分布,其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$, 求 $E(X)$, $D(X)$.

解
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx$$
$$= -x e^{-x/\theta} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x/\theta} dx = \theta.$$



$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx \\ &= -x^2 e^{-x/\theta} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-x/\theta} dx = 2\theta^2. \end{aligned}$$

于是 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$.

即有 $E(X) = \theta, D(X) = \theta^2$.



例6 设 $X \sim b(n, p)$, 求 $E(X)$, $D(X)$.

解 由二项分布的定义知, 随机变量 X 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 且在每次试验中 A 发生的概率为 p . 引入随机变量

$$X_k = \begin{cases} 1, & A \text{ 在第 } k \text{ 次试验发生,} \\ 0, & A \text{ 在第 } k \text{ 次试验不发生,} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

易知 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$,

由于 X_k 只依赖于第 k 次试验, 而各次试验相互独



立, 又知 $X_k, k = 1, 2, \dots, n$ 服从同一 $(0-1)$ 分布.

上式表明以 n, p 为参数的二项分布变量, 可分解成为 n 个相互独立且都服从以 p 为参数的 $(0-1)$ 分布的随机变量之和.

由例 2 知

$$E(X_k) = p, D(X_k) = p(1-p), k = 1, 2, \dots, n.$$

故知
$$E(X) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = np.$$

又由于 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 得

$$D(X) = D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n D(X_k) = np(1-p).$$

即 $E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p).$



例7 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$, $D(X)$.

解 先求标准正态变量

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

的数学期望和方差. Z 的概率密度为

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$

于是
$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$



$$D(Z) = E(Z^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$$

$$= 1,$$

因 $X = \mu + \sigma Z$,

即得 $E(X) = E(\mu + \sigma Z) = \mu$,

$$D(X) = D(\mu + \sigma Z) = D(\sigma Z) = \sigma^2 D(Z) = \sigma^2,$$



例8 设活塞的直径(以cm计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 气缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X, Y 相互独立. 任取一只活塞, 任取一只气缸, 求活塞能装入气缸的概率.

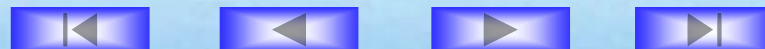
解 按题意需求 $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$.

由于 $X - Y \sim N(-0.10, 0.0025)$,

故有 $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$

$$\begin{aligned} &= P\left\{\frac{(X - Y) - (-0.10)}{\sqrt{0.0025}} < \frac{0 - (-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\right\} = \Phi\left(\frac{0.10}{0.05}\right) \\ &= \Phi(2) = 0.9772. \end{aligned}$$

补充例题



切比雪夫不等式

切比雪夫

定理 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2$, 则对于任意正数 ε , 不等式

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

切比雪夫不等式

证 只就连续型随机变量的情况来证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$,



$$\begin{aligned} P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} &= \int_{|x - \mu| \geq \varepsilon} f(x) dx \\ &\leq \int_{|x - \mu| \geq \varepsilon} \frac{|x - \mu|^2}{\varepsilon^2} f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^2. \end{aligned}$$

切比雪夫不等式也可以写成如下的形式:

$$P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$



切比雪夫不等式给出了在随机变量的分布未知, 而只知道 $E(X)$ 和 $D(X)$ 的情况下估计概率 $P\{|X - E(X)| < \varepsilon\}$ 的界限.

例如取 $\varepsilon = 3\sqrt{D(X)}, 4\sqrt{D(X)}$ 得到

$$P\{|X - E(X)| < 3\sqrt{D(X)}\} \geq 0.8889,$$

$$P\{|X - E(X)| < 4\sqrt{D(X)}\} \geq 0.9375,$$

这个估计是比较粗糙的, 如果已经知道随机变量的分布时, 那么所需求的概率可以确切地计算出来, 也就没有必要利用这一不等式来作估计了.

方差性质4°必要性的证明:

设 $D(X) = 0$, 要证 $P\{X = E(X)\} = 1$.

证 用反证法 假设 $P\{X = E(X)\} < 1$, 则对于某一个数 $\varepsilon > 0$, 有 $P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} > 0$, 但由切比雪夫不等式, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 因 $\sigma^2 = 0$, 有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} = 0,$$

矛盾, 于是 $P\{X = E(X)\} = 1$.



四、小结

1. $D(X)$ 是刻画 X 取值分散程度的一个量, 它是衡量 X 取值分散程度的一个尺度. 若 $D(X)$ 较小意味着 X 的取值比较集中在 $E(X)$ 的附近, 若 $D(X)$ 较大则表示 X 的取值较分散.

2. 方差的计算公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$

3. 方差的性质

$$1^\circ D(C) = 0;$$

$$2^\circ D(CX) = C^2 D(X);$$

$$3^\circ D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

4. 切比雪夫不等式

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$



第三节 协方差及相关系数

一、协方差与相关系数的概念及性质

二、相关系数的意义

三、小结

一、协方差与相关系数的概念及性质

1. 问题的提出

若随机变量 X 和 Y 相互独立, 那么

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

若随机变量 X 和 Y 不相互独立

$$D(X + Y) = ?$$

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= E(X + Y)^2 - [E(X + Y)]^2 \\ &= D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}. \end{aligned}$$

协方差



2.定义

量 $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差.记为 $\text{Cov}(X, Y)$, 即

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}.$$

而

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$$

称为随机变量 X 与 Y 的相关系数.



3.说明

(1) X 和 Y 的相关系数又称为标准协方差,它是一个无量纲的量.

(2) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= E[X - E(X)]E[Y - E(Y)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

(3) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\begin{aligned}\Rightarrow D(X + Y) &= D(X) + D(Y) \\ &\quad + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = D(X) + D(Y).\end{aligned}$$



4. 协方差的计算公式

$$(1) \operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y);$$

$$(2) D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y).$$

证明 (1) $\operatorname{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$

$$\begin{aligned} &= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(2) D(X + Y) &= E\{[(X + Y) - E(X + Y)]^2\} \\&= E\{[(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2\} \\&= E\{[X - E(X)]^2\} + E\{[Y - E(Y)]^2\} \\&\quad + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\&= D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).\end{aligned}$$



5. 性质

1° $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X);$

2° $\text{Cov}(aX, bY) = ab \text{Cov}(X, Y), a, b$ 为常数;

3° $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y).$



例1 设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2	$P\{Y = i\}$
1	0	1/4	1/4	0	1/2
4	1/4	0	0	1/4	1/2
$P\{X = i\}$	1/4	1/4	1/4	1/4	1

易知 $E(X) = 0, E(Y) = 5/2, E(XY) = 0,$

$\rho_{XY} = 0, X, Y$ 不相关. 即 X, Y 不存在线性关系.

由于 $P\{X = -2, Y = 1\} = 0 \neq P\{X = -2\}P\{Y = 1\}$

所以 X, Y 不相互独立.

事实上, $Y = X^2, Y$ 的值完全可由 X 的值所确定.



例2 设 (X, Y) 服从二维正态分布, 它的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

求 X 与 Y 的相关系数.



解 (X, Y) 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

故知 $E(X) = \mu_1, E(Y) = \mu_2, D(X) = \sigma_1^2, D(Y) = \sigma_2^2$.

而 $\text{Cov}(X, Y)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)(y - \mu_2) f(x, y) dx dy$$



$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1)(y-\mu_2) \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right]^2} dy dx.$$

令 $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)$, $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, 则有

$\text{Cov}(X, Y)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu + \rho\sigma_1\sigma_2u^2) e^{-\frac{u^2}{2} - \frac{t^2}{2}} dt du$$



$$\begin{aligned} &= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi} \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi}, \end{aligned}$$

即有

$$\text{Cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

于是

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho.$$



结论

(1) 二维正态分布密度函数中, 参数 ρ 代表了 X 与 Y 的相关系数;

(2) 二维正态随机变量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立.



二、相关系数的意义

1. 问题的提出

问 a, b 应如何选择, 可使 $aX + b$ 最接近 Y ?
接近的程度又应如何来衡量?

设 $e = E[(Y - (a + bX))^2]$,

则 e 可用来衡量 $a + bX$ 近似表达 Y 的好坏程度.
当 e 的值越小, 表示 $a + bX$ 与 Y 的近似程度越好.

确定 a, b 的值, 使 e 达到最小.

$$\begin{aligned} e &= E[(Y - (a + bX))^2] \\ &= E(Y^2) + b^2 E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) \\ &\quad - 2aE(Y). \end{aligned}$$

将 e 分别关于 a, b 求偏导数, 并令它们等于零, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0. \end{cases}$$

解得 $b_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)}, \quad a_0 = E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)}.$



将 a_0, b_0 代入 $e = E[(Y - (a + bX))^2]$ 中, 得

$$\begin{aligned}\min_{a,b} e &= E[(Y - (a + bX))^2] \\ &= E[(Y - (a_0 + b_0X))^2] \\ &= (1 - \rho_{XY}^2) D(Y).\end{aligned}$$

2. 相关系数的意义

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时 e 较小, 表明 X, Y 的线性关系联系较紧密.

当 $|\rho_{XY}|$ 较小时, X, Y 线性相关的程度较差.

当 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 和 Y 不相关.



思考 设 θ 服从 $[0, 2\pi]$ 的均匀分布, $\xi = \cos \theta$, $\eta = \cos(\theta + a)$, 这里 a 是常数, 求 ξ 和 η 的相关系数?

解
$$E(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 0,$$

$$E(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x + a) \, dx = 0,$$

$$E(\xi^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2},$$

$$E(\eta^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(x + a) \, dx = \frac{1}{2},$$



$$E(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos(x+a) dx = \frac{1}{2} \cos a,$$

由以上数据可得相关系数为 $\rho = \cos a$.

当 $a = 0$ 时, $\rho = 1, \xi = \eta$,
当 $a = \pi$ 时, $\rho = -1, \xi = -\eta$, $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{当 } a = 0 \text{ 时, } \rho = 1, \xi = \eta, \\ \text{当 } a = \pi \text{ 时, } \rho = -1, \xi = -\eta, \end{matrix}} \right\} \text{存在线性关系}$

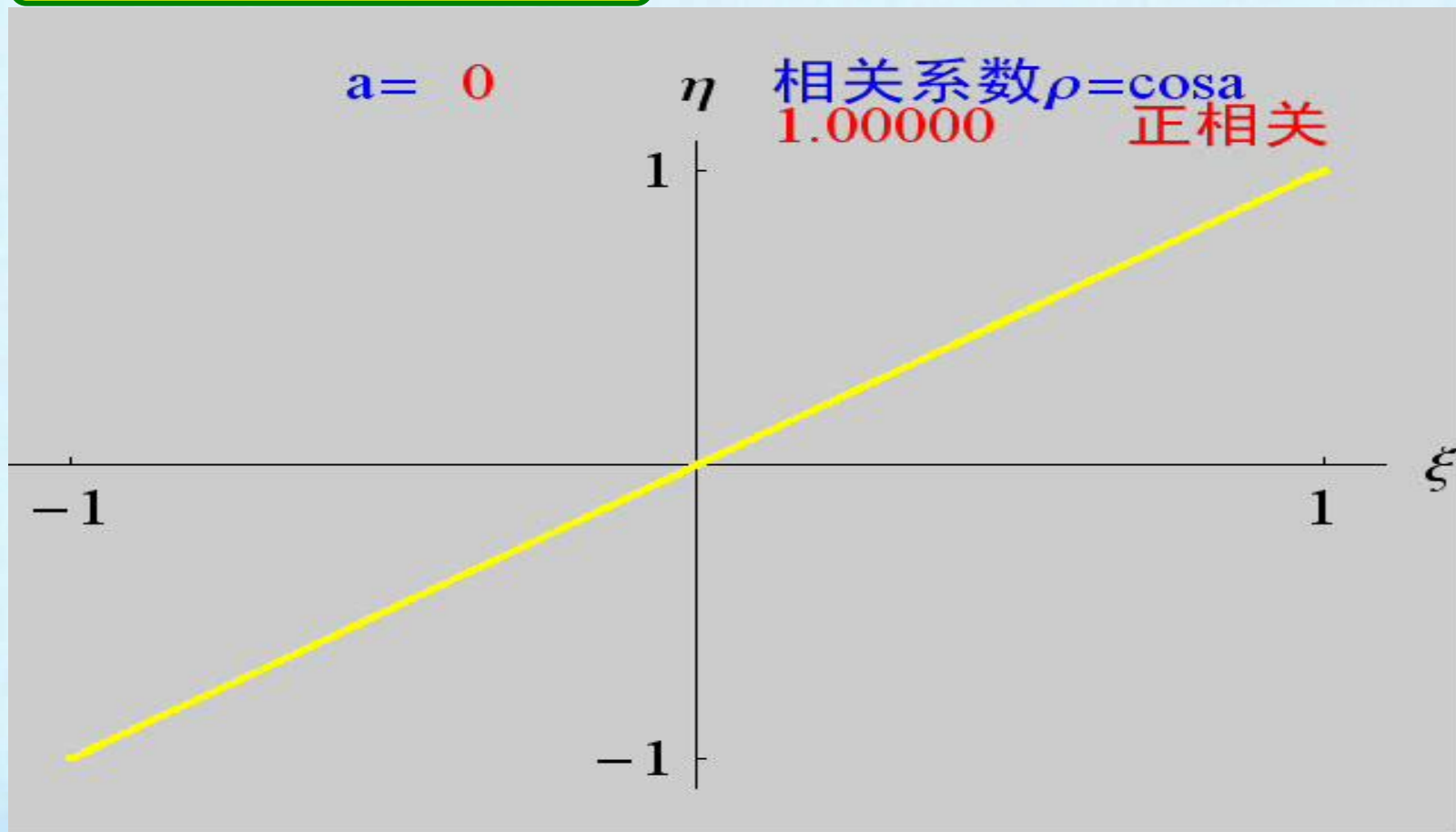
当 $a = \frac{\pi}{2}$ 或 $a = \frac{3\pi}{2}$ 时, $\rho = 0$, ξ 与 η 不相关.

但 $\xi^2 + \eta^2 = 1$, 因此 ξ 与 η 不独立.



动画演示 ξ 与 η 的相关关系

单击图形播放/暂停 ESC键退出



3. 注意

(1) 不相关与相互独立的关系

相互独立 $\xrightarrow{\text{green}} \xleftarrow{\text{red}}$ 不相关

(2) 不相关的充要条件

1° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0$;

2° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$;

3° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.



4. 相关系数的性质

$$1^\circ \quad |\rho_{XY}| \leq 1.$$

2° $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是: 存在常数 a, b 使

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

证 1° 由(3.4)式与 $E\{[Y - (a_0 + b_0X)]^2\}$ 及 $D(Y)$ 的非负性, 得知 $1 - \rho_{XY}^2 \geq 0$, 亦即 $|\rho_{XY}| \leq 1$.

2° 若 $|\rho_{XY}| = 1$ 由(3.4)式得

$$E\{[Y - (a_0 + b_0X)]^2\} = 0.$$

$$\begin{aligned}\text{从而 } 0 &= E\{[Y - (a_0 + b_0 X)]^2\} \\ &= D[Y - (a_0 + b_0 X)] + [E(Y - (a_0 + b_0 X))]^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故有 } D[Y - (a_0 + b_0 X)] &= 0, \\ E[Y - (a_0 + b_0 X)] &= 0.\end{aligned}$$

又由方差性质4°知

$$P\{Y - (a_0 + b_0 X) = 0\} = 1,$$

$$\text{即 } P\{Y = a_0 + b_0 X\} = 1.$$

反之, 若存在常数 a^*, b^* 使



$$P\{Y = a^* + b^* X\} = 1,$$

即 $P\{Y - (a^* + b^* X) = 0\} = 1,$

于是 $P\{[Y - (a^* + b^* X)]^2 = 0\} = 1,$

即得 $E\{[Y - (a^* + b^* X)]^2\} = 0.$

故有 $0 = E\{[Y - (a^* + b^* X)]^2\}$
 $\geq \min_{a,b} E[(Y - (a + bX))^2]$

$$= E\{[Y - (a_0 + b_0 X)]^2\}$$

$$= (1 - \rho_{XY}^2) D(Y). \quad \text{即得} \quad |\rho_{XY}| = 1.$$



ρ_{XY} 的含义:

ρ_{XY} 是一个用来表征 X, Y 之间线性关系紧密程度的量.

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时, X, Y 线性相关的程度较好;

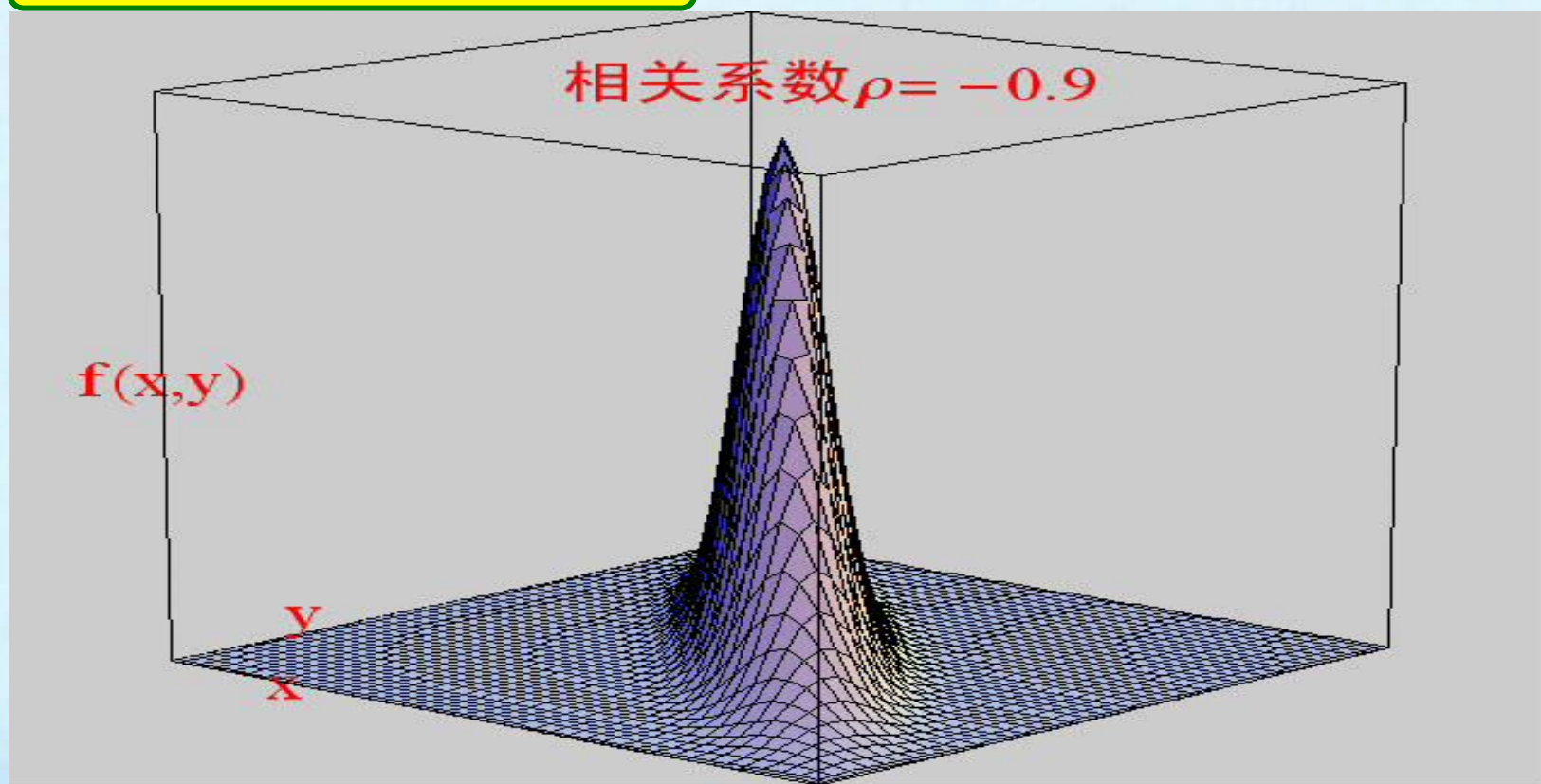
当 $|\rho_{XY}|$ 较小时, X, Y 线性相关的程度较差.

当 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 和 Y 不相关.



二维正态随机变量 (X,Y) 的概率密度曲面与
相关系数 $\rho_{XY} = \rho$ 的关系.

单击图形播放/暂停 ESC键退出



三、小结

1. 协方差与相关系数的概念及性质

(1) 定义

(2) 协方差的计算公式

(3) 性质

2. 相关系数的意义和性质

(1) 意义

(2) 性质



第四节 矩、协方差矩阵

一、矩、协方差矩阵

二、 n 维正态变量的性质

三、小结

一、矩、协方差矩阵基本概念

1.矩的概念

设 X 和 Y 是随机变量, 若

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

存在, 称它为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩. 若

$$E\{[X - E(X)]^k\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

存在, 称它为 X 的 k 阶中心矩.



若 $E(X^k Y^l)$, $k, l = 1, 2, \dots$ 存在,
称它为 X 和 Y 的 $k + l$ 阶混合矩.

若 $E\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l\}$, $k, l = 1, 2, \dots$

存在, 称它为 X 和 Y 的 $k + l$ 阶混合中心矩.



说明

- (1) 以上数字特征都是随机变量函数的数学期望;
- (2) 随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩, 方差为二阶中心矩, 协方差 $\text{Cov}(X, Y)$ 是 X 与 Y 的二阶混合中心矩;
- (3) 在实际应用中, 高于 4 阶的矩很少使用.



三阶中心矩 $E\{[X - E(X)]^3\}$ 主要用来衡量随机变量的分布是否有偏。

四阶中心矩 $E\{[X - E(X)]^4\}$ 主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度如何。



2. 协方差矩阵

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ 都存在, 则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量的协方差矩阵.



例如 二维随机变量 (X_1, X_2) 的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\}$,

$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\}$,

$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\}$,

$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}$.

由于 $c_{ij} = c_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 所以协方差矩阵为对称的非负定矩阵.



协方差矩阵的应用

协方差矩阵可用来表示多维随机变量的概率密度，从而可通过协方差矩阵达到对多维随机变量的研究



以二维正态随机变量 (X_1, X_2) 为例. 概率密度

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

现在将上式中花括号内的式子写成矩阵形式, 为此引入下面的列矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

(X_1, X_2) 的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

它的行列式 $\det C = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$, C 的逆矩阵为

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

经过计算可知(这里矩阵 $(X - \mu)^T$ 是 $(X - \mu)$ 的转置矩阵).



$$\begin{aligned}& (X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \\&= \frac{1}{\det C} (x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2) \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \\&= \frac{1}{1 - \rho^2} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right. \\&\quad \left. + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right].\end{aligned}$$



于是 (X_1, X_2) 的概率密度可写成

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{2/2} (\det C)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \right\}.$$

引入列矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix},$$



n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率密度定义为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det C)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \right\}.$$

其中 C 是 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的协方差矩阵.



推广 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率密度可表示为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det C)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \right\}.$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$



二、 n 维正态变量的性质

1° n 维正态随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的每一个分量 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ 都是正态随机变量;

反之, 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 都是正态随机变量, 且相互独立, 则 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 n 维正态随机变量.

2° n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件: $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的任意的线性组合 $l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_n X_n$ 服从一维正态分布.

3° 若 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 设 $Y_1, \dots, Y_k$ 是 $X_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的线性函数, 则 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ 也服从多维正态分布.

这一性质称为正态变量的线性变换不变性

4° 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 则“ $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立”与“ $X_1, X_2, \dots, X_n$ 两两不相关”是等价的.



三、小结

1. 矩是随机变量的数字特征.

{ 数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩 ;
方差 $D(X)$ 是 X 的二阶中心矩 ;
协方差 $\text{Cov}(X, Y)$ 是 X 与 Y 的二阶混合中心矩 .

2. 正态变量是最重要的随机变量, 其性质一定要熟练掌握.

