

线性代数课程绪论

课程简介

本课程的主要内容

线性代数发展史

线代数的应用

课程简介

线性代数是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题。线性关系是指数学对象之间的关系是以一次形式来表达的。最简单的线性问题就是解线性方程组。

行列式和矩阵为处理线性问题提供了有力的工具，也推动了线性代数的发展。向量概念的引入，形成了向量空间的概念，而线性问题都可以用向量空间的观点加以讨论。因此向量空间及其线性变换，以及与此相联系的矩阵理论，构成了线性代数的中心内容。

它的特点是研究的变量数量较多，关系复杂，方法上既有严谨的逻辑推证、又有巧妙的归纳综合，也有繁琐和技巧性很强的数字计算，在学习中，需要特别加强这些方面的训练。

本课程的主要内容

行列式
运算

矩阵
运算

向量
运算

方程组
求解

测试
系统

实验
系统

第一章 行列式

第二章 矩阵及其运算

第三章 矩阵的初等变换
及线性方程组

第四章 向量组的线性相关性

第五章 相似矩阵及二次
型

基础

基本内容

用向量的观点讨论
基本问题并介绍向
量空间的有关内容

矩阵理论

上页

下页

返回

线性代数发展史

起源： 线性方程组

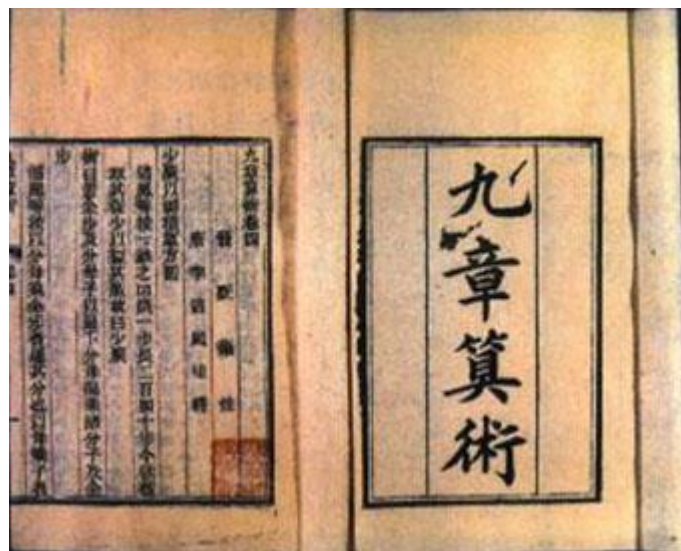
工具： 矩阵, 行列式, 向量

方法： 初等变换

应用： 自然科学, 工程技术, 经济

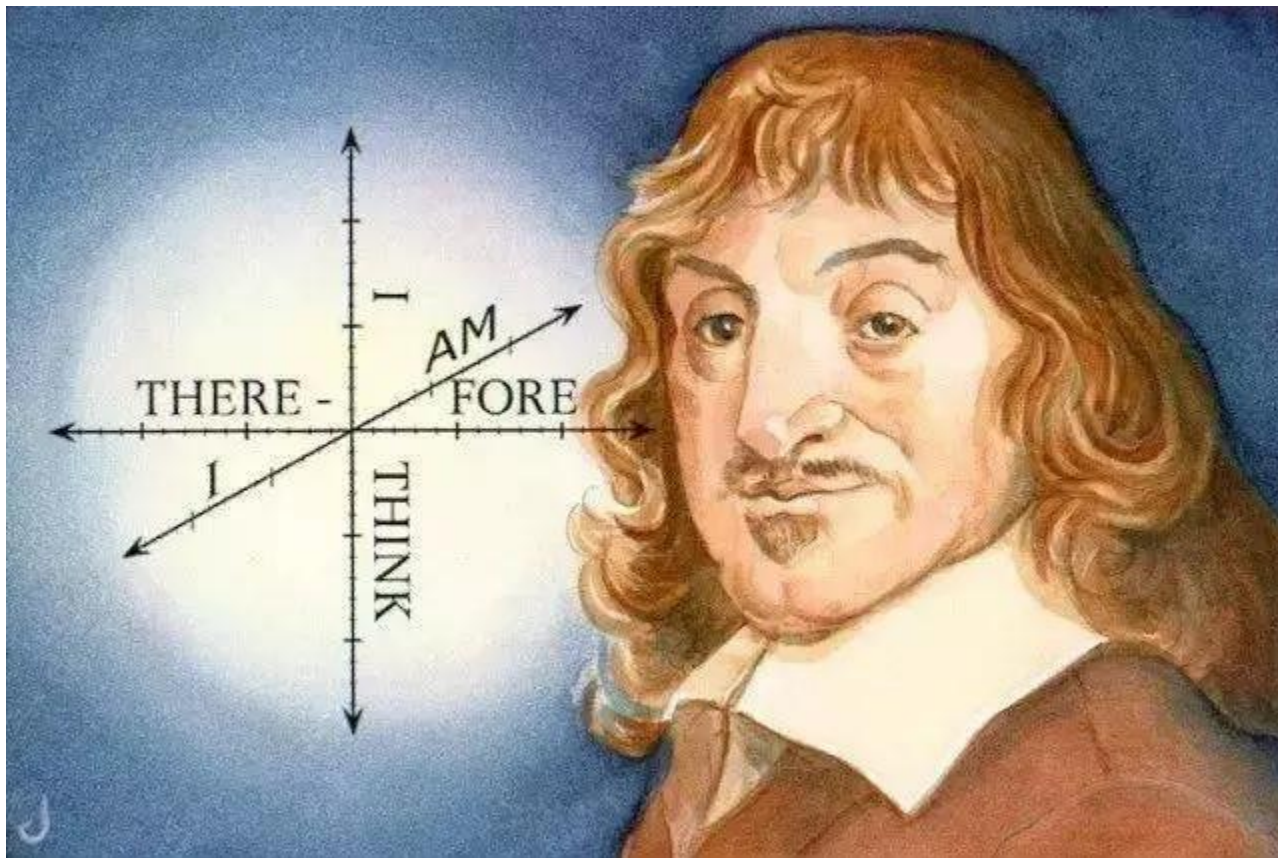
发展及后续： 线性空间, 矩阵论, 群论

线性代数发展史

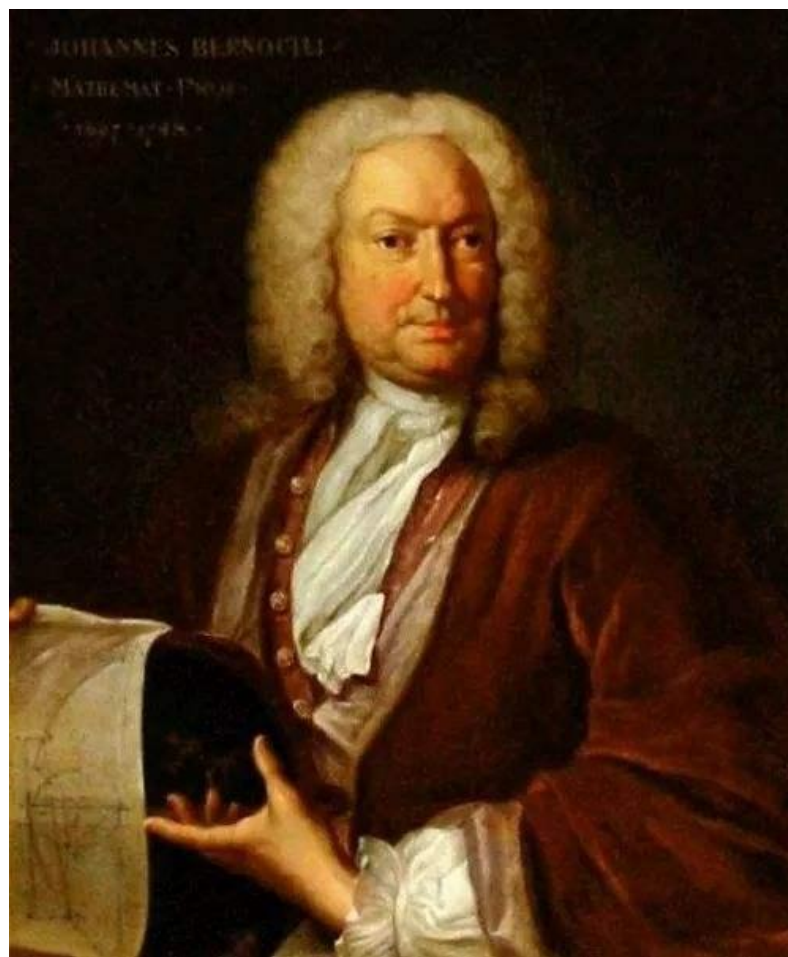


<<九章算术>>是从先秦开始, 经过众多学者编撰修改, 约于西汉中叶成书, 第八章为方程(方程术即线性方程组的消元解法)

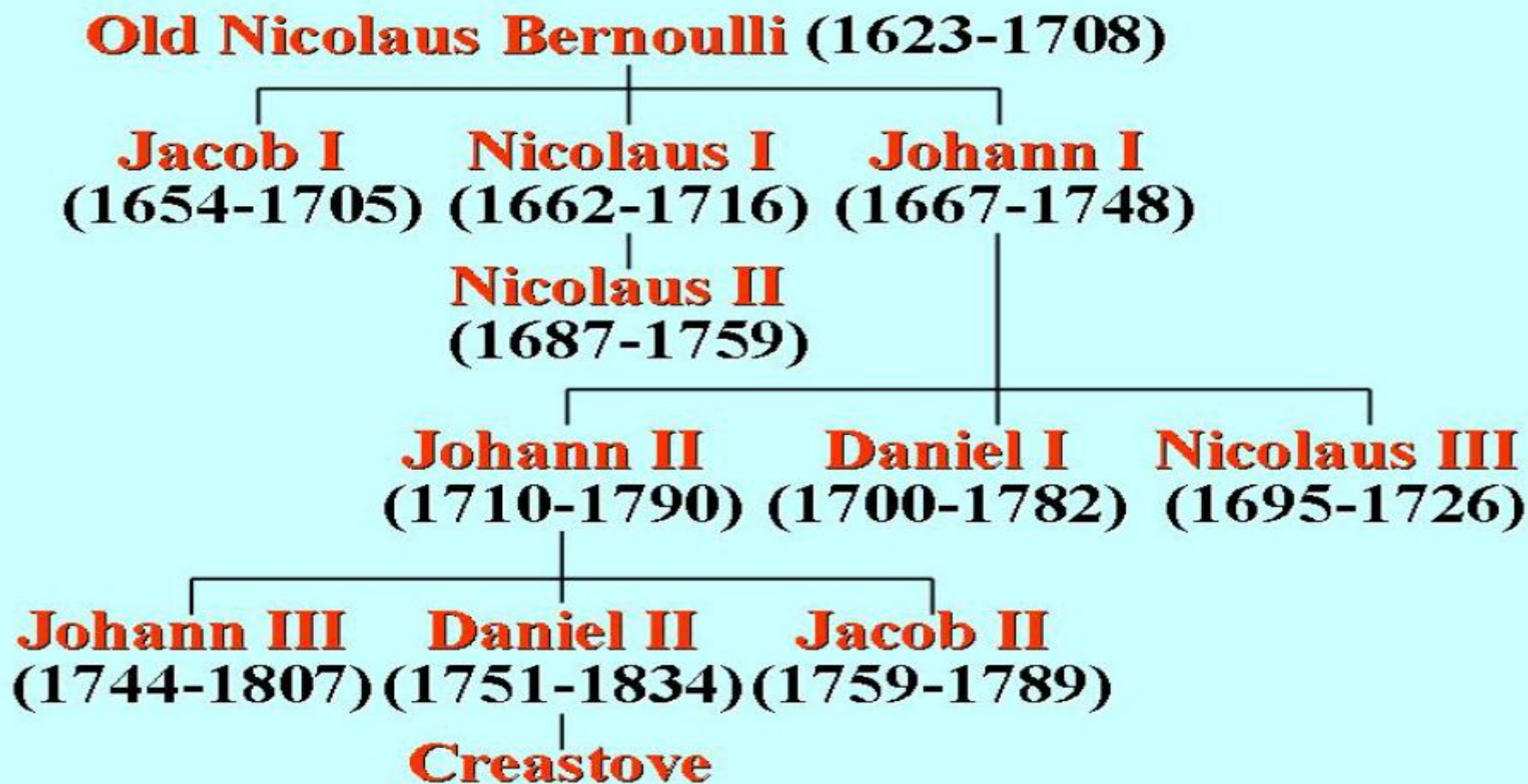
线性代数发展史



笛卡尔(法)



约翰.伯努利(瑞士)





関孝和

关孝和(日本)



莱布尼茨(德)



克拉默(瑞士)

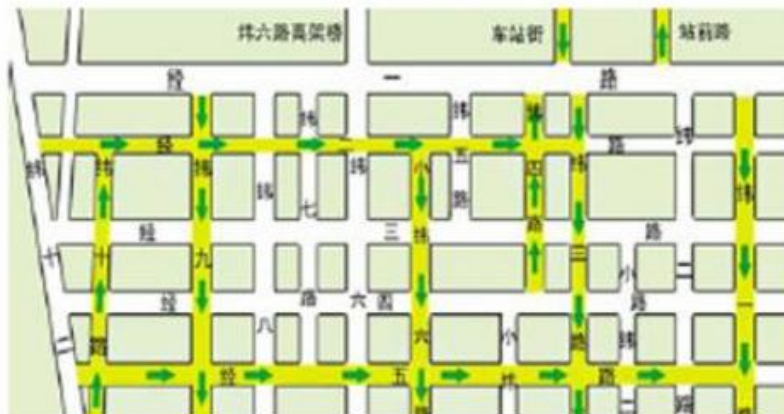
线性代数的应用

案例一. 交通网络流量分析问题

城市道路网中每条道路、每个交叉路口的车流量调查, 是分析、评价及改善城市交通状况的基础。根据实际车流量信息可以设计流量控制方案, 必要时设置单行线, 以免大量车辆长时间拥堵。



图1 某地交通实况



案例二. 配方问题

在化工、医药、日常膳食等方面都经常涉及到配方问题. 在不考虑各种成分之间可能发生某些化学反应时, 配方问题可以用向量和线性方程组来建模.



图1 日常膳食搭配

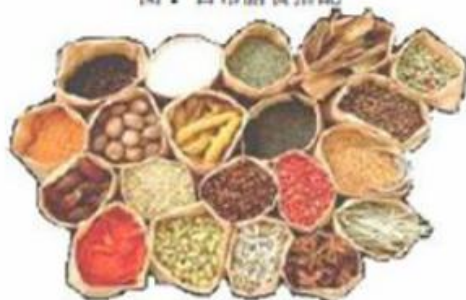


图2 几种常见的作料

【模型准备】一种佐料由四种原料 A、B、C、D 混合而成. 这种佐料现有两种规格, 这两种规格的佐料中, 四种原料的比例分别为 2:3:1:1 和 1:2:1:2. 现在需要四种原料的比例为 4:7:3:5 的第三种规格的佐料. 问: 第三种规格的佐料能否由前两种规格的佐料按一定比例配制而成?

【模型假设】(1) 假设四种原料混合在一起时不发生化学变化. (2) 假设四种原料的比例是按重量计算的. (3) 假设前两种规格的佐料分装成袋, 比如说第一种规格的佐料每袋净重 7 克(其中 A、B、C、D 四种原料分别为 2 克, 3 克, 1 克, 1 克).

案例三. 投入产出问题

在研究多个经济部门之间的投入产出关系时, W. Leontief 提出了投入产出模型. 这为经济学研究提供了强有力的手段. W. Leontief 因此获得了 1973 年的 Nobel 经济学奖.



图 1 三个经济部门

这里暂时只讨论一个简单的情形.

【模型准备】某地有一座煤矿, 一个发电厂和一条铁路. 经成本核算, 每生产价值 1 元钱的煤需消耗 0.3 元的电; 为了把这 1 元钱的煤运出去需花费 0.2 元的运费; 每生产 1 元的电需 0.6 元的煤作燃料; 为了运行电厂的辅助设备需消耗本身 0.1 元的电, 还需要花费 0.1 元的运费; 作为铁路局, 每提供 1 元运费的运输需消耗 0.5 元的煤, 辅助设备要消耗 0.1 元的电. 现煤矿接到外地 6 万元煤的订货, 电厂有 10 万元电的外地需求, 问: 煤矿和电厂各生产多少才能满足需求?

【模型假设】假设不考虑价格变动等其他因素.

【模型建立】设煤矿, 电厂, 铁路分别产出 x 元, y 元, z 元刚好满足需求. 则有以下表

表 1 消耗与产出情况

		产出(1 元)			产出	消耗	订单
		煤	电	运			
消耗	煤	0	0.6	0.5	x	$0.6y + 0.5z$	60000
	电	0.3	0.1	0.1	y	$0.3x + 0.1y + 0.1z$	100000
	运	0.2	0.1	0	z	$0.2x + 0.1y$	0

根据题意, 应该有

案例五. CT 图像的代数重建问题

X 射线透视可以得到 3 维对象在 2 维平面上的投影, CT 则通过不同角度的 X 射线得到 3 维对象的多个 2 维投影, 并以此重建对象内部的 3 维图像. 代数重建方法就是从这些 2 维投影出发, 通过求解超定线性方程组, 获得对象内部 3 维图像的方法.



图 1 双层螺旋 CT



图 2 CT 图像

这里我们考虑一个更简单的模型, 从 2 维图像的 1 维投影重建原先的 2 维图像. 一个长方形图像可以用一个横竖均匀划分的离散网格来覆盖, 每个网格对应一个像素, 它是该网格上各点像素的均值. 这样一个图像就可以用一个矩阵表示, 其元素就是图像在一点的灰度值(黑白图像). 下面我们以 3×3 图像为例来说明.

表 1 消耗与产出情况

	3×3 图像 各点的灰度值			水平方向上的 叠加值
	$x_1 = 1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
	$x_4 = 0$	$x_5 = 0.5$	$x_6 = 0.5$	$x_4 + x_5 + x_6 = 1$
	$x_7 = 0.5$	$x_8 = 0$	$x_9 = 1$	$x_7 + x_8 + x_9 = 1.5$
竖直方向上的 叠加值	$x_1 + x_4 + x_7 = 1.5$	$x_2 + x_5 + x_8 = 0.5$	$x_3 + x_6 + x_9 = 1.5$	

案例十五. 网页等级

互联网是人们交流和获取信息的重要渠道. 人们常常通过搜索关键词查到所需的信息. 然而包含某个特定关键词的页面往往是数以万计的. 例如, 包含“线性代数”的页面有几十万个. 我们不可能短时间内逐一阅读这些页面. 因此需要一种方法将这些页面按等级排列, 使得重要的页面排在靠前位置. 为了解决这一问题, Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani 和 Terry Winograd 在 1998 年提出了一种能够自动判断网页重要性的技术, 其关键就是网页等级 (PageRank) 的概念.



图 1 常见的搜索引擎

【模型准备】现有 10 个包含关键词“线性代数”的网页, 其中一些网页链接

到另一些网页上. 已知 $A = (a_{ij})_{10 \times 10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 其中

案例十八. 简单的种群增长问题

生物种群数量变化情况会影响生态平衡. 统计、监测某些生物种群数量并研究其变化规律和趋势对于维护生态平衡和保护环境都具有重要的意义.



图 1 猫头鹰和森林鼠

【模型准备】经过统计, 某地区猫头鹰和森林鼠的数量具有如下规律: 如果没有森林鼠做食物, 每个月只有一半的猫头鹰可以存活, 如果没有猫头鹰作为捕食者, 老鼠的数量每个月会增加 10%. 如果老鼠充足(数量为 R), 则下个月猫头鹰的数量将会增加 $0.4R$. 平均每个月每只猫头鹰的捕食会导致的 104 只老鼠的死亡数. 试确定该系统的演化情况.

【模型假设】不考虑其他因素对猫头鹰和森林鼠的数量的影响.

【模型建立】设猫头鹰和森林鼠在时刻 k 的数量为 $x_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$, 其中 k 是以月份为单位的时间, O_k 是研究区域中猫头鹰的数量, R_k 是老鼠的数量(单位: 千只). 则

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= 0.5O_k + 0.4R_k, \\ R_{k+1} &= -0.104O_k + 1.1R_k. \end{aligned}$$

分析 x_k 的变化趋势.

【模型求解】令 $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{pmatrix}$ 则其特征值 $\lambda_1 = 1.02$, $\lambda_2 = 0.58$ 对应的特

线性代数的特点

- 内容丰富, 历史悠久, 比较抽象, 非常有用.

