

《概率论与数理统计》模拟试卷 10 参考答案

一、判断题.

1. 若事件 A, B 满足 $A \cup B = \Omega$, 则称 A 与 B 是对立事件. (×)
2. 概率为1的事件, 一定是必然事件. (×)
3. 无记忆性是指数分布的特征. (√)
4. 二维随机变量的联合分布函数不能确定边缘分布函数. (×)
5. 对于任意的 X 和 Y , 都有 $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$. (×)
6. 二项分布的极限分布是正态分布. (√)
7. 统计量是含有未知参数的样本函数. (×)

二、填空题.

1. 设一批产品中一、二、三等品各占 60%, 30%, 10%, 现从中随机抽取一件, 结果不是三等品, 则取到的是一等品的概率为 $\frac{2}{3}$.
2. 设 $X \sim N(3, 4)$, 则 $P(2 < X \leq 4) = 0.383$. ($\Phi(0.5) = 0.6915$)
3. 设随机变量 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $\text{Var}(X) = \sigma^2$, 由切比雪夫不等式知

$$P\{|X - \mu| \geq 2\sigma\} \leq \frac{1}{4} \text{ 或 } (0.25).$$

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, X 的概率密度函数是

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta-1} & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \text{ 则 } \theta \text{ 的矩估计 } \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}}.$$

5. 假设检验的方法是依据小概率事件原理.

三、选择题.

1. 对于两个随机事件 A 与 B , 则与 $A \cup B = B$ 不等价的是 (D).
A. $A \subset B$ B. $\bar{B} \subset \bar{A}$ C. $A\bar{B} = \phi$ D. $\bar{A}B = \phi$
2. 在全国人口普查中, 调查个体是 (A).
A. 每一个人 B. 每一户 C. 全国人口 D. 每个省
3. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 当 σ 增大时, 概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ (D).
A. 单调增大 B. 单调减小 C. 非单调变化 D. 保持不变
4. 设 $X \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 (B).
A. $\rho = -1$ B. $\rho = 0$ C. $\rho = 1$ D. $|\rho| \leq 1$

5. 设 X 在 $[4,6]$ 上服从均匀分布, 则 $E(2X-5) = (\quad C \quad)$.
- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7
6. 若 $X \sim N(1,4)$, $Y \sim N(1,9)$ 且 $\rho_{XY} = 0.45$, 则 $Cov(X,Y) = (\quad D \quad)$.
- A. 2.4 B. 2.5 C. 2.6 D. 2.7
7. 由列维—林德贝格定理可知, 当 n 充分大时, 则 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim (\quad C \quad)$.
- A. $N(\mu, \sigma^2)$ B. $N(0,1)$ C. $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ D. $N(n\mu, n\sigma^2)$

四、计算题.

1. 设总体 $X \sim P(\lambda)$, 分布律为: $P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, ($\lambda > 0, x=0,1,2,\dots$)
- $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是来自总体 X 的一个样本观测值, 且 $x_i > 0, (i=1,2,\dots,n)$, 求 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}$?

解: 似然函数为:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n P(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{(x_i)!} e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n [(x_i)!]}$$

似然函数取对数:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = -n\lambda + \ln \lambda (\sum_{i=1}^n x_i) - \sum_{i=1}^n \ln [(x_i)!]$$

对数似然函数求导并令导数为零, 可得:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \ln \lambda (\sum_{i=1}^n x_i) - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln [(x_i)!] \right\} = \frac{1}{\lambda} (\sum_{i=1}^n x_i) - n = 0$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i) = \bar{x}.$$

2. 李教授要外出参加会议, 他乘汽车、火车和飞机的概率分别是 0.6、0.3 和 0.1, 而汽车、火车和飞机正点到达的概率分别是 0.7、0.8 和 0.9, 则: (1) 他正点到达的概率有多大? (2) 若已知晚点到达, 则他是乘飞机的概率为多大?

解: 设 A_1, A_2, A_3 分别表示“李教授乘汽车、火车和飞机”,

B 表示“正点到达”, $\bar{B}$ 表示“晚点到达”,

依题意可知: A_1, A_2, A_3 构成一个完备事件组。

$$P(A_1) = 0.6 \quad P(A_2) = 0.3 \quad P(A_3) = 0.1$$

$$P(B|A_1) = 0.7 \quad P(B|A_2) = 0.8 \quad P(B|A_3) = 0.9$$

$$P(\bar{B}|A_1) = 0.3 \quad P(\bar{B}|A_2) = 0.2 \quad P(\bar{B}|A_3) = 0.1$$

(1) 由全概率公式可得, 李教授正点到达的概率为:

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = 0.6 \times 0.7 + 0.3 \times 0.8 + 0.1 \times 0.9 = 0.75$$

(2) 若已知晚点到达, 由贝叶斯公式知, 则他是乘飞机的概率为:

$$P(A_3|\bar{B}) = \frac{P(A_3)P(\bar{B}|A_3)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(\bar{B}|A_i)} = \frac{0.1 \times 0.1}{0.6 \times 0.3 + 0.3 \times 0.2 + 0.1 \times 0.1} = 0.04$$

3. 设 X 的概率密度为: $f(x) = \begin{cases} a+bx^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 已知 $E(X) = \frac{3}{5}$,

求 (1) 常数 a 和 b ; (2) $Var(X)$.

$$\text{解: 由 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 (a+bx^2) dx = a + \frac{b}{3} \quad \text{①}$$

$$\frac{3}{5} = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot (a+bx^2) dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \quad \text{②}$$

由①、②联立方程组, 解得: $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{6}{5}$,

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5} + \frac{6}{5}x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}x^2) dx = \frac{11}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{11}{25} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{25}$$

4. 若熔化时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从一批同类保险丝中随机抽取 9 根, 测其熔化时间的样

本均值为 $\bar{x} = 56.32$, 样本方差 $s^2 = (0.22)^2$, 求 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区

间? ($\chi^2_{0.025}(8) = 17.534$, $\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$, $\chi^2_{0.95}(8) = 2.733$,

$\chi^2_{0.975}(8) = 2.18$)

解: $\bar{x} = 56.32$, $s^2 = 0.0484$, $n = 9$,

$$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05,$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(8) = 17.534; \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(8) = 2.18$$

$$\text{置信下限: } \underline{\theta} = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = \frac{8 \times 0.0484}{17.534} = 0.022;$$

$$\text{置信上限: } \bar{\theta} = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = \frac{8 \times 0.0484}{2.18} = 0.178;$$

所以， σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间(0.022, 0.178)

5. 某房地产投资公司出售五个楼盘面积与售价资料如下：

楼盘面积 x (百平方米)	9	15	10	11	10
售价 y (千元)	36	80	44	55	35

试建立售价 Y 对楼盘面积 X 的直线回归方程？

解：(1)

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	9	36	81	1296	324
	15	80	225	6400	1200
	10	44	100	1936	440
	11	55	121	3025	605
	10	35	100	1225	350
Σ	55	250	627	13882	2919
$\frac{1}{n}\Sigma$	11	50			

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 55 \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 250 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 627 \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 13882 \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 2919$$

$$\text{回归方程: } \hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{5 \times 2919 - 55 \times 250}{5 \times 627 - (55)^2} = 7.682$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 50 - 7.682 \times 11 = -34.502$$

所以，回归方程为 $\hat{y} = -34.502 + 7.68x$