

第五章 相似矩阵及二次型

第 1 节向量的内积、长度及正交性

教 学 主 要 内 容	1. 内积；2. 内积的性质；3. 正交向量组；4. 规范正交基及其求法； 5. 正交矩阵与正交变换	
教 学 目 标	【知识目标】：①掌握内积；内积的性质；正交向量组；②理解规范正交基及其求法，正交矩阵与正交变换。 【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】：通过探索、归纳、总结的过程，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，探索事物本质属性的欲望。	
教材 分析	重点	1. 内积；2. 内积的性质；3. 正交向量组；4. 规范正交基及其求法； 5. 正交矩阵与正交变换。
	难点	规范正交基及其求法；正交矩阵与正交变换。
教学方法与手段	探究式教学法+黑板粉笔。	
学习方法	学生可利用教师精心准备的例题，通过教师的引导，不断观察、分析、探索、归纳总结。	
教 学 学时数	2 学时，90 分钟。	

(一)复习引入

1. 想一想:

高中立体几何中向量的长度与夹角是如何定义的

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

2. 思考: 若是将以上问题推广到 n 维向量空间中, 会是什么情况?

(二)讲授新知

一、 内积及其性质

$$\text{定义 1 设有 } n \text{ 维向量 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

令 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$, 称 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ 为向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的内积。

注: $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

内积的运算性质: P155 (1-4)

二、向量的长度与性质

$$\text{定义 2 令 } \|\mathbf{x}\| = \sqrt{[\mathbf{x}, \mathbf{x}]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

称 $\|\mathbf{x}\|$ 为 n 维向量 $\mathbf{x}$ 的长度。

向量长度的性质: 155 页 (1-4)

单位向量, 向量的单位化, 夹角。

三、正交向量组

定义 3 若两向量 α 与 β 的内积等于零, 即 $[\alpha, \beta] = 0$, 则称向量 α 与 β 相互正交, 记作 $\alpha \perp \beta$ 。

正交向量组: 若 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一个非零向量组, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中的向量两两正交, 则称该向量组为正交向量组。

注: 单位向量组是两两正交的。

定义 1 如果两个向量 α 和 β 的内积等于零, 即 $\alpha^T \beta = 0$, 则称向量 α 和 β 互相正交 (垂直)

教 学 过 程	注：零向量与任意向量正交。 例 1 找出下面三个向量相互正交的关系 $\alpha_1 = (9, 3, 5, 9)^T$, $\alpha_2 = (9, -5, 3, -9)^T$, $\alpha_3 = (14, 4, -6, -12)^T$。 发现: $\alpha_1^T \alpha_2 = 0, \alpha_1^T \alpha_3 = 0, \alpha_2^T \alpha_3 \neq 0$, 即 α_1 与 α_2 正交, α_1 与 α_3 正交, α_2 与 α_3 不正交。 例 2 找出下面三个向量相互正交的关系 $\alpha_1 = (5, 6, 8, 10)^T$, $\alpha_2 = (8, 10, -5, -6)^T$, $\alpha_3 = (10, -8, 6, -5)^T$。 发现: α_1 与 α_2 正交, α_1 与 α_3 正交, α_2 与 α_3 正交。 例 2 中所反映的问题是, 一组非零向量组中的向量两两正交。按下面的定义 定义 2 如果 R^n 中的非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 两两正交, 即 $(i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, s)$ 则称该向量组为正交向量组。 通过该定义我们知道例 2 中的向量组为正交向量组。 思考: 例 2 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关还是无关? 请同学们说出你们判断的方法和结论。 发现: 它们是线性无关的。 定理 1 R^n 中的正交向量组线性无关。 思考: R^n 中线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与正交向量组的关系? 正交向量组线性无关, 但是线性无关的向量组不一定正交。 四、规范正交基及其求法 可是我们有施密特正交化方法, 它可以将线性无关的向量组生成正交向量组, 并且这两个向量组可以相互线性表示。 施密特正交化方法 例 3 设线性无关的向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (3, 3, -1, -1)^T$, $\alpha_3 = (-2, 0, 6, 8)^T$, 试将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交化。 解: 利用施密特正交化方法, 令
------------------	---

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 = (3, 3, -1, -1)^T - \frac{4}{4}(1, 1, 1, 1)^T = (2, 2, -2, -2)^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\beta_2^T \beta_2} \beta_2 = (-2, 0, 6, 8)^T - \frac{12}{4}(1, 1, 1, 1)^T - \frac{(-32)}{16}(2, 2, -2, -2)^T = (-1, 1, -1, 1)^T$$

则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为正交向量组，且与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可互相线性表示。

施密特正交化方法的一般步骤

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\beta_2^T \beta_2} \beta_2$$

.....

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{\beta_2^T \beta_2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{\beta_{s-1}^T \beta_{s-1}} \beta_{s-1}$$

请同学们再观察下面的向量组，告诉大家该向量组中的向量有什么关系？

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, \quad \alpha_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T, \quad \alpha_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T$$

若是用该向量构成矩阵，这个矩阵会有什么特点？

五、正交矩阵与正交变换

观察下面的矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ 计算 } Q^T Q.$$

发现 $Q^T Q = E$ 。

定义 3 设 n 阶矩阵 Q ，满足 $Q^T Q = E$ ，则称 Q 为正交矩阵。

请大家继续思考下面的问题：

1. 若 Q 为正交矩阵，则其行列式的值为？
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆吗？
3. 若 P, Q 都是正交矩阵，则它们的积 PQ 也是正交矩阵吗？为什么？

例 4 判别下列矩阵是否是正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

使用定义知道是正交矩阵。

我们知道由单位正交向量组构成的矩阵是正交矩阵，那么反之正交矩阵的列向量组

是单位正交向量组吗？

下面我们来研究该问题。对于一个三阶的正交矩阵而言

令 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 Q 的列向量，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \alpha_1^T \alpha_3 \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \alpha_2^T \alpha_3 \\ \alpha_3^T \alpha_1 & \alpha_3^T \alpha_2 & \alpha_3^T \alpha_3 \end{pmatrix} = E,$$

$$\text{则} \begin{cases} \alpha_i^T \alpha_i = 1 & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \alpha_i^T \alpha_j = 0 & (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

发现 Q 为正交矩阵的充分必要条件是列向量组是单位正交向量组。

定理 2 设 Q 为 n 阶实矩阵，则 Q 为正交矩阵的充分必要条件是列（行）向量组是单位正交向量组。

（三）课堂小结

1. 正交向量组的定义； 2. 正交矩阵的定义及性质。

第五章 相似矩阵及二次型

第 2 节 方阵的特征值和特征向量

教学主要内容	1. 矩阵的特征值； 2. 矩阵的特征向量。	
教学目标	【知识目标】：①理解并掌握矩阵的特征值的求法；②掌握矩阵的特征向量，并学会灵活应用。 【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】：通过探索、归纳、总结的过程，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，探索事物本质属性的欲望。	
教材分析	重点	矩阵的特征值和特征向量。
	难点	矩阵的特征值和特征向量。
教学方法与手段	探究式教学法+黑板粉笔。	
学习方法	学生可利用教师精心准备的例题，通过教师的引导，不断观察、分析、探索、归纳总结。	
教学学时数	2 学时，90 分钟。	

(一)复习引入

1. 想一想：引例 矩阵与向量的乘法，设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\alpha_1, A\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\alpha_2, A\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

发现二元实向量 α_1, α_2 的像 $A\alpha_1, A\alpha_2$ 是原像的倍数， α_3 与 $A\alpha_3$ 就不具有这个性质。

2. 思考：以上的问题说明了矩阵的什么本质？

(二)讲授新知

我们把以上所反应的这种矩阵和向量的乘积等于向量的倍数的事实，给它们定义具体的名称

一、矩阵的特征值和特征向量的概念

定义 1 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶矩阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 α ，使得

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 为 A 的一个特征值， α 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

思考：为什么 α 是非零向量？

对于矩阵 A 而言，如何求它的特征值和特征向量？

二、矩阵的特征值和特征向量的求法

$A\alpha = \lambda\alpha$ 改写成 $(\lambda E - A)\alpha = 0$ ，即 α 是齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解。

问题：请同学们回忆齐次线性方程组有非零解的充要条件。

$$\text{使用该充要条件得 } |\lambda E - A| = 0 = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

三、特征多项式和特征方程的概念

定义 2 设 A 为 n 阶矩阵，含有未知量 λ 的矩阵 $\lambda E - A$ 称为 A 的特征矩阵，其行列式 $|\lambda E - A|$ 为 λ 的 n 次多项式，称为 A 的特征多项式， $|\lambda E - A| = 0$ 称为 A 的特征方程。

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

请同学们思考后发言。

解：矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

化简得 $(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$ ，所以 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ 是矩阵 A 的两个不同的特征值。

当 $\lambda_1 = 4$ 时，解齐次线性方程组 $(4E - A)x = 0$ ，由此得基础解系 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以 A 的

对应于 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量为 $c_1 \alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_1 为任意非零常数)

当 $\lambda_2 = -2$ 时，齐次线性方程组 $(-2E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ，所以 A 的

对应于 $\lambda_2 = -2$ 的全部特征向量为 $c_2 \alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ (c_2 为任意非零常数)

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解：矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$$

令 $|\lambda E - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8) = 0$ ，得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$ 。

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ，解齐次线性方程组 $(-E - A)x = 0$ ，可得基础解系为 $\alpha_1 = (-1, 2, 0)^T$ ，
 $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$ ，所以 A 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为不全为零的任意常数})。$$

当 $\lambda_3 = 8$ 时，解齐次线性方程组 $(-8E - A)x = 0$ ，可得基础解系为 $\alpha_3 = (2, 1, 2)^T$ 。所以

教 学 过 程	A 的对应于 $\lambda_3 = 8$ 的全部特征向量为 $c_3 \alpha_3 = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_3 \text{ 为任意常数})$ 请同学们归纳总结计算 A 的特征值和特征向量的步骤 (1) 解 A 的特征方程 $\lambda E - A = 0$, 求出 A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (其中可能有重根) (2) 对每一特征值 λ_i, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$, 得齐次方程组的基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 则 A 的对应于 λ_i 的全部特征向量为 $c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_s \alpha_s \quad (c_1, c_2, \dots, c_s \text{ 为不全为零的任意常数})$ (三) 课堂小结 理解并熟练的掌握矩阵的特征值和特征向量。 思考题: n 阶矩阵 A 与它的转置矩阵 A^T 的特征值有什么关系? (四) 布置作业 $P_{198} \quad 1(1), (3).$
------------------	---

第五章 相似矩阵及二次型

实对称矩阵的特征值和特征向量

教学主要内容	1. 实对称矩阵的特征值和特征向量的性质； 2. 实对称矩阵与正交矩阵相似的条件。	
教学目标	【知识目标】：①理解并掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质；②掌握实对称矩阵与正交矩阵相似的条件，并学会灵活应用. 【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】：通过探索、归纳、总结的过程，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，探索事物本质属性的欲望。	
教材分析	重点	实对称矩阵与正交矩阵相似的条件
	难点	实对称矩阵与正交矩阵相似的条件
教学方法与手段	多媒体辅助教学和探究式教学法	
学习方法	学生可利用教师精心准备的例题，通过教师的引导，不断观察、分析、探索、归纳总结.	

(一)复习引入

1. 想一想：上节课，我们初步学习了在计量经济学和一些经济数学模型中，经常遇到的实对称矩阵。这节课我们进一步深入的学习这样的两个问题 1. 实对称矩阵的特征值、特征向量会具有怎样的特殊性质？2. 我们知道任意的 n 阶矩阵不一定能与对角矩阵相似，也即 n 阶矩阵与对角矩阵相似是有条件的，它要有 n 个线性无关的特征向量。那由于实对称矩阵是一类特殊的 n 阶矩阵，它要与对角矩阵相似，需要什么特殊的条件？以上这两个问题将是本节课重点要解决的问题。

(二)讲授新知

探究一：实对称矩阵的特征值一定是实数吗？

探究二：实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量有什么关系？

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ ，对应的特征向量为 $\alpha_1 = (2, 2, 1)^T$ ，

$\alpha_2 = (2, -1, -2)^T$ ， $\alpha_3 = (1, -2, 2)^T$

发现特征值都是实数，并且 α_1 ， α_2 ， α_3 两两正交。

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$ ，对应的特征向量为 $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$ ，

$\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$ ， $\alpha_3 = (1, 2, -2)^T$

发现特征值都是实数，并且 α_1 与 α_3 ， α_2 与 α_3 两两正交

结论：

定理 1 实对称矩阵的特征值都是实数。

定理 2 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量是正交的。

思考：实对称矩阵的 k 重特征值的特征向量有什么关系？

引理 1 实对称矩阵的 k 重特征值一定有 k 个线性无关的特征向量。

上面引例 2 中 $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$ 线性无关，利用施密特正交化方法，可

以将 α_1, α_2 正交化, 令 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ 。并且 α_1, α_2 与 β_1, β_2 可以

线性表示。

对于重根的特征向量, 可以利用上节课学过的施密特正交化方法, 将一组线性无关的向量转化为一组正交向量组, 并且这两个向量组可以线性表示。

所以, 将实对称矩阵的 k 重特征值的 k 个线性无关的特征向量正交化后, 仍为 A 的属于该特征值的特征向量且两两正交。

而且按照定理 2 β_1, β_2 都与 α_3 正交。即我们可求得 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$ 个正交化的特征向量组, 若是把这些特征向量单位化, 它们仍是正交向量组, 比如 α_3 , 单位化得

$\gamma_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, 这时 β_1, β_2 与 γ_3 仍然是正交的。

下面我们把这些单位正交向量组排成矩阵 Q , 则 Q 就是正交矩阵,

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

总结

定理 2 设 A 为实对称矩阵, 则存在正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

通过这个过程, 我们发现了实对称矩阵一定与对角矩阵相似。而且也发现了如何求这个正交矩阵 Q 的步骤。

对于实对称矩阵 A ，求正交矩阵 Q ，使得 A 相似对角化（即 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ ）的方法。

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，求正交矩阵 Q ，使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 为对角矩阵。

解：第一步 求 A 的特征值与所属的线性无关的特征向量 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ， $\lambda_3 = 3$ ，

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ，对应的线性无关的特征向量是 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，

$\lambda_3 = 3$ ，对应的线性无关的特征向量是 $\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， η_1, η_3 正交， η_2, η_3 正交

第二步 用施密特正交化方法将 η_1, η_2 正交化

$$\beta_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

第三步 β_1, β_2, η_3 分别单位化

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{第四步 令 } Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

教 学 过 程	则 $Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 请同学们自己归纳总结步骤。 (三) 课堂小结 1. 实对称矩阵的特征值和特征向量的性质； 2. 实对称矩阵与正交矩阵相似的条件。 思考题： 计量经济学和一些经济数学模型中，经常遇到实对称矩阵，请同学们下去查阅详细资料，以一篇小论文的形式提交查阅的情况。 (四) 布置作业 P_{200} 23.
----------------------------	--