



矩阵的初等变换——

行阶梯形矩阵、行最简形矩阵

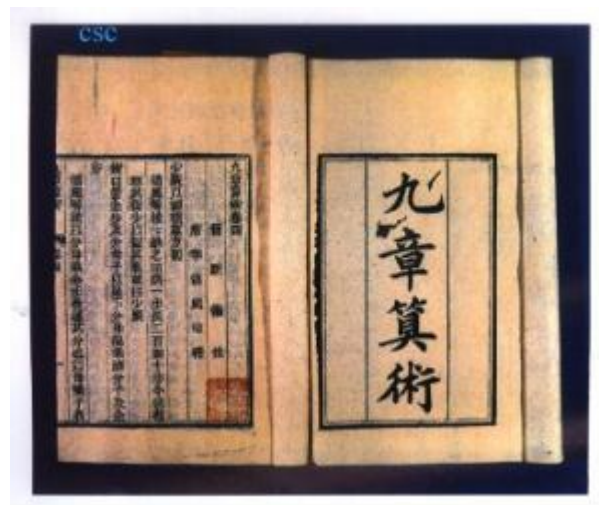


线性
方程
组



消元解法

矩阵的初等变换



西汉数学家刘徽在《九章算术·方程术》中详细的陈述了消元解法，在注中，他提出了解线性方程组的新方法，运用了比率算法的思想。这本书的起源最早可以追述到战国时期。



高斯（德国）
(1777.4.30- 1855.2.23)
相当于乾隆年间



若尔当, C.

若尔当（法国）
(1838.1.5-1922.1.22)
相当于咸丰年间

(1) 矩阵的初等变换：矩阵的初等行(列)变换

定义1 下面三种矩阵的变换：称为矩阵的初等行变换

- 1 交换矩阵的某两行;
- 2 矩阵的某一行乘以非零数;
- 3 将矩阵的某一行的倍数加到另一行.



思考：

对应线性方程组的求解过程思考，当对一个矩阵做初等行变换时，变换到什么程度或什么样子，可以暂时停一停或歇歇脚？变换到什么程度就完成了任务？

矩阵的初等变换

我们看看下面的三个例子，它们表示线性方程组的求解做到了那一步？

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

进一步认识，找出它们的共同特点

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

行阶梯
形矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一、行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 零行：元素全为零的行；
2. 非零行：元素不全为零的行；
3. 非零首元：非零行第一个不为零的元素；
4. 行阶梯形矩阵

a. 若有零行，则零行在最下方

b. 非零首元的列指标随着行指标的增加而严格递增

注：任何一个矩阵都可以经过初等行变换化为行阶梯形。

思考：

对应线性方程组的求解过程继续思考，当把一个矩阵初等行变换到行阶梯形就表示该方程组的解求出来了吗？

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

回答：显然不是

行阶梯形仅表示完成了消元的过程，我们还要进行回代，才能完成线性方程组的求解。

下面，我们通过前面的一个例子看看，回代之后，会出现什么类型的矩阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & \textcircled{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

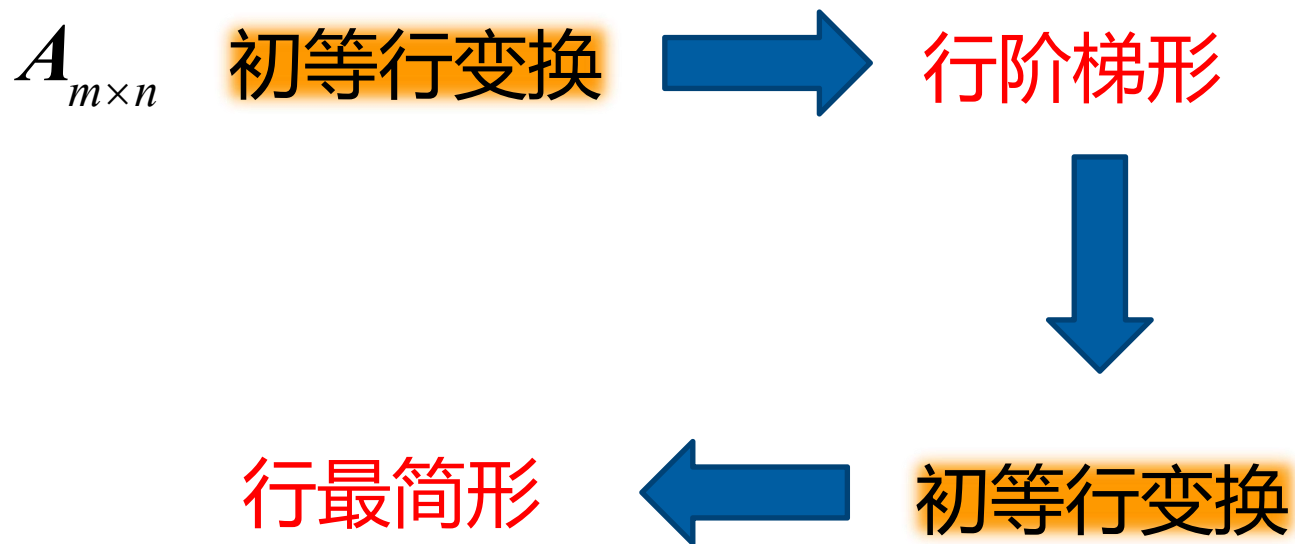
行最简矩阵

二、行最简形矩阵

1. 是行阶梯形；
2. 非零首元都是1；
3. 非零首元所在列的其余元素都是0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

注：任何一个矩阵都可以经过初等行变换化为行最简形矩阵.



例1

将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 化为行阶梯形和行最简形矩阵.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形

思考：

行最简形矩阵还能继续变换成为更简洁的形式吗？

课堂小结

(1)行阶梯形矩阵

(2)行最简形矩阵

(3)灵活、熟练应用它们对矩阵做等价变换

谢谢大家聆听！

