



§ 3 相似矩阵

定义： 设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP = B ,$$

则称 B 为矩阵 A 的**相似矩阵**，

对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行**相似变换**。

称可逆矩阵 P 为把 A 变成 B 的**相似变换矩阵**。

定理： 若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，从而 A 和 B 的特征值也相同。

证明： 根据题意，存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = B$ 。

于是

$$|B - \lambda E| = | \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} - \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} |$$

.

定理：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，从而 A 和 B 的特征值也相同。

推论：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 的多项式 $\varphi(A)$ 和 B 的多项式 $\varphi(B)$ 相似。

证明：设存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = B$ ，则 $P^{-1}A^k P = B^k$ 。

设 $\varphi(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0$ ，那么

$$\begin{aligned} & P^{-1} \varphi(A) P \\ &= P^{-1} (c_m A^m + c_{m-1} A^{m-1} + \dots + c_1 A + c_0 E) P \\ &= c_m P^{-1} A^m P + c_{m-1} P^{-1} A^{m-1} P + \dots + c_1 P^{-1} A P + c_0 P^{-1} E P \\ &= c_m B^m + c_{m-1} B^{m-1} + \dots + c_1 B + c_0 E \\ &= \varphi(B). \end{aligned}$$

定理： 设 n 阶矩阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 就是 Λ 的 n 个特征值.

证明：

$$|\Lambda| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

故 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 就是 Λ 的 n 个特征值.

定理：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，从而 A 和 B 的特征值也相同。

推论：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 的多项式 $\varphi(A)$ 和 B 的多项式 $\varphi(B)$ 相似。

若 n 阶矩阵 A 和 n 阶对角阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 相似，则

$$\varphi(A) = P^{-1} \varphi(\Lambda) P$$

从而通过计算 $\varphi(\Lambda)$ 可方便地计算 $\varphi(A)$ 。

若 $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$,

可逆矩阵 P ，满足 $P^{-1}AP = \Lambda$ （对角阵）

$$\begin{array}{c} \downarrow \uparrow \text{ ? } \\ AP = P\Lambda \\ \downarrow \uparrow \end{array}$$

P.123定理4:

n 阶矩阵 A 和对角阵相似
当且仅当
 A 有 n 个线性无关的特征向量

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

A 的
特征值

对应的
特征向量

推论: 如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 和对角阵相似。

其中

$$A(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$