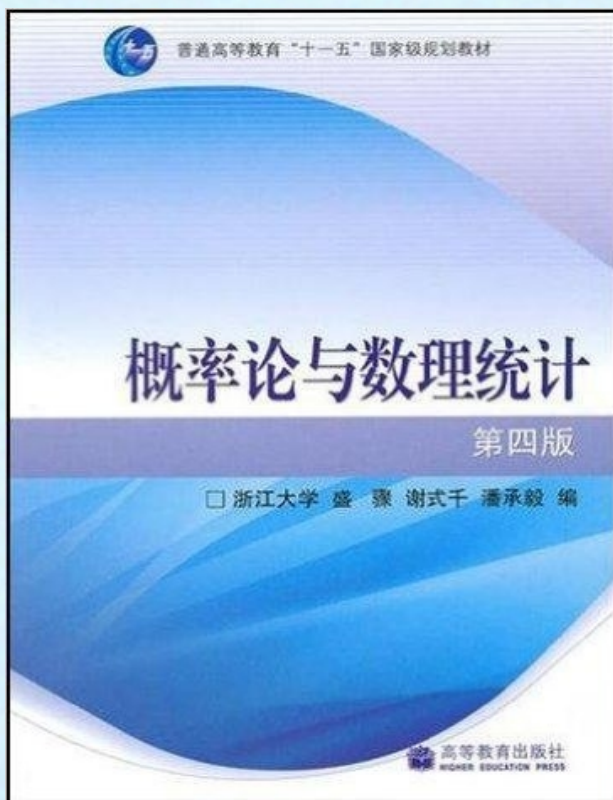


目 录



- 第一章 概率论的基本概念
- 第二章 随机变量及其分布
- 第三章 多维随机变量及其分布
- 第四章 随机变量的数字特征
- 第五章 大数定律及中心极限定理
- 第六章 样本及抽样分布
- 第七章 参数估计
- 第八章 假设检验
- 第九章 方差分析及回归分析

第五节 条件概率

一、条件概率

二、乘法定理

三、全概率公式与贝叶斯公式

四、小结

一、条件概率

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率。

含义: 当条件 A 成立时, 事件 B 发生的概率, 等于事件 AB 同时发生的概率除以事件 A 发生的概率。

同理可得 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (P(B) > 0),$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

二、乘法定理

设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$ ，则有

$$P(AB) = P(A)P(B | A)$$

同理可得：设 $P(B) > 0$ ，则有

$$P(AB) = P(B)P(A | B)$$

引例：

世说新语(下卷) 贤媛 第十九 (5)

赵母嫁女，女临去，

敕之曰：“慎勿为好！”

女曰：“不为好，可为恶邪？”

母曰：“好尚不可为，其况恶乎！”

母亲的说法，你认为有道理吗？

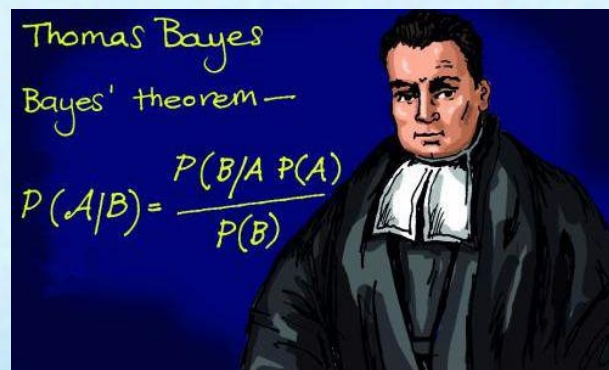
如何用概率理论知识来解释呢？

世
說
新
語



三、全概率公式和贝叶斯公式

1. 样本空间的划分
2. 全概率公式
3. 贝叶斯公式
4. 思考
5. 小结



统计小知识:

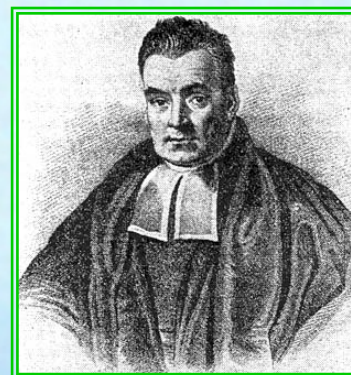
伟大的先知总是被自己的时代遗弃

—— 统计学家贝叶斯牧师

贝叶斯全名为托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes, 1701-1761), 是一位与牛顿同时代的牧师, 是一位**业余数学家**, 平时就思考些有关上帝的事情, 当然, 统计学家都认为概率这个东西就是上帝在掷骰子。当时贝叶斯发现了古典统计学当中的一些缺点, 从而提出了自己的“**贝叶斯统计学**”, 但贝叶斯统计当中由于引入了一个主观因素(先验概率), 一点都不被当时的人认可。

直到20世纪中期, 随着计算机技术的发展, 统计学家使用贝叶斯统计理论解决了很多之前古典统计学中不能解决的问题。

如今, 贝叶斯学派与频率学派已成为数理统计学的两大学派, 基于各自的理论, 在诸多领域中都起到了重要作用。



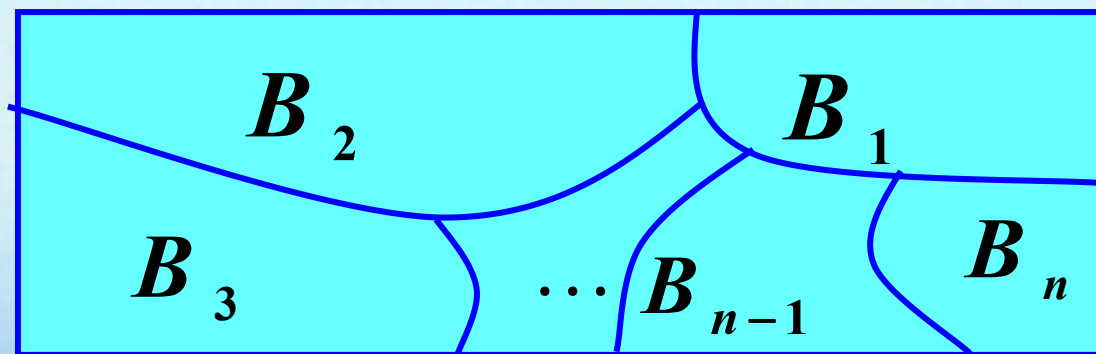
1. 样本空间的划分

定义 设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 E 的一组事件, 若

$$(i) \quad B_i B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(ii) \quad B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S,$$

则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.



2. 全概率公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 则

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j) P(A|B_j)$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)$$

证：因为

$$A=AS=A(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)=AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n,$$

由假设 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 且 $(AB_i)(AB_j) = \emptyset$,

$i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 根据加法公式可得到

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$$

全概率公式的理解：

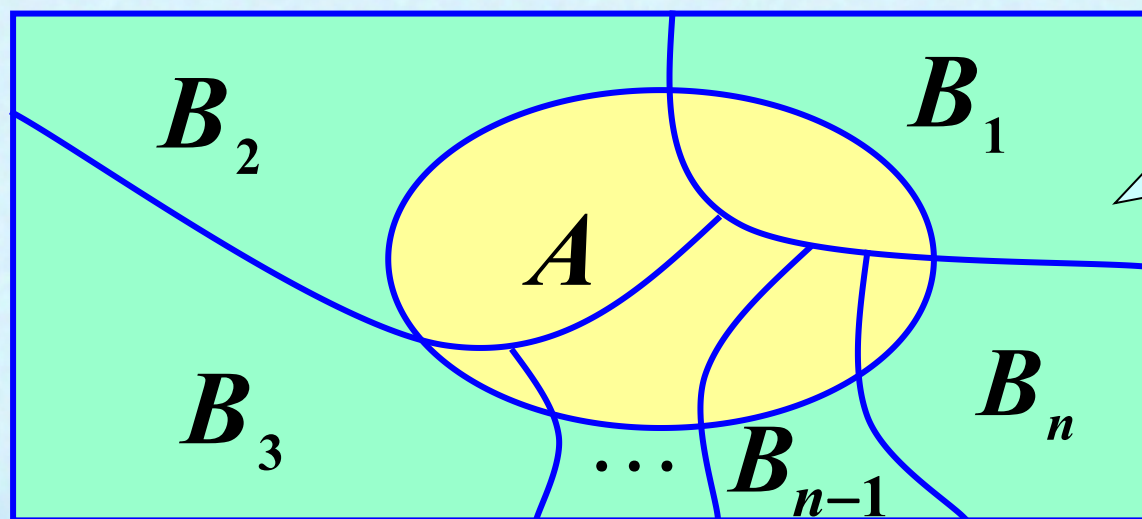
$B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分：

可以认为事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为对全概率“1”的一个划分。这也是全概率公式名称的由来。

条件概率可以将一个概率转化为在一个已知的全概率划分下的条件概率 $P(A|B_i)$ 与这个全概率划分 $P(B_i)$ 的**内积**。

全概率公式的说明:

全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题, 分解为若干个简单事件的概率计算问题, 最后应用概率的可加性求出最终结果.



类似于定积分定义中的曲边梯形面积: 分割步骤 (化整为零各个击破)

3. 贝叶斯公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S . A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

证 由条件概率的定义及全概率公式得

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

贝叶斯公式的理解：
$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)},$$

贝叶斯公式常用于求解后验概率。

贝叶斯公式的特点就是能够通过**先验概率**和**条件概率**求**后验概率**，在许多场合都会用到。

A 发生时，可能全概率的划分 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 都会发生。

$$A \text{ 发生时 } B_i \text{ 发生的概率} = \frac{B_i \text{ 发生的概率} \times B_i \text{ 发生时 } A \text{ 发生的概率}}{\sum_{j=1}^n (B_j \text{ 发生的概率} \times B_j \text{ 发生时 } A \text{ 发生的概率})}$$

全概率公式和贝叶斯公式的应用分析

全概率公式——知因寻果

就是表示达到某个目的，有多种方式（或者造成某种结果，有多种原因），问达到目的（或者造成这种结果）的概率是多少？

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)$$

贝叶斯公式——执果索因

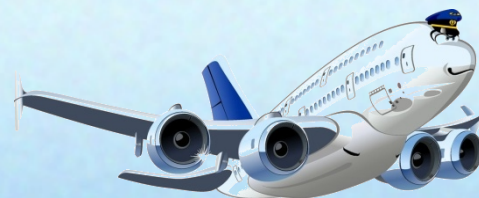
当已知结果，问导致这个结果的第*i*原因的可能性是多少？

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)},$$

例1 李教授要从外地到北京来开会，他乘汽车、火车和飞机的概率分别是 **0.05**、**0.15** 和 **0.80**，而乘汽车、火车和飞机**晚点**的概率分别是 **3%**、**2%** 和 **1%**。

求：(1) 李教授**晚点**的概率是多少？

(2) 若已知李教授**晚点到达**，则他乘哪种交通工具的可能性大？



分析:

1.5 条件概率

乘坐方式	迟到的概率	乘坐的概率	划分 B_1 B_2 B_3
汽车	0.03	0.05	
火车	0.02	0.15	
飞机	0.01	0.80	

解： 设 B_1 , B_2 , B_3 分别表示“李教授乘汽车、火车和飞机”，

A 表示“正点到达”； $\bar{A}$ 表示“晚点到达”。

依题意可知： B_1 , B_2 , B_3 构成样本空间 S 的一个划分。



$$P(B_1) = 0.05$$

$$P(\bar{A} | B_1) = 0.03$$



$$P(B_2) = 0.15$$

$$P(\bar{A} | B_2) = 0.02$$



$$P(B_3) = 0.80$$

$$P(\bar{A} | B_3) = 0.01$$

(1) 由全概率公式可得, 李教授晚点到达的概率为:

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(B_1)P(\bar{A} | B_1) + P(B_2)P(\bar{A} | B_2) + P(B_3)P(\bar{A} | B_3) \\&= 0.05 \times 0.03 + 0.15 \times 0.02 + 0.8 \times 0.01 \\&= 0.0125\end{aligned}$$

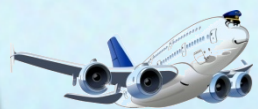
(2) 由贝叶斯公式知, 李教授晚点达到的概率分别为:



$$P(B_1 | \bar{A}) = \frac{P(B_1)P(\bar{A} | B_1)}{P(B_1)P(\bar{A} | B_1) + P(B_2)P(\bar{A} | B_2) + P(B_3)P(\bar{A} | B_3)} = \frac{0.05 \times 0.03}{0.0125} = 0.12$$



$$P(B_2 | \bar{A}) = \frac{P(B_2)P(\bar{A} | B_2)}{P(B_1)P(\bar{A} | B_1) + P(B_2)P(\bar{A} | B_2) + P(B_3)P(\bar{A} | B_3)} = \frac{0.15 \times 0.02}{0.0125} = 0.24$$



$$P(B_3 | \bar{A}) = \frac{P(B_3)P(\bar{A} | B_3)}{P(B_1)P(\bar{A} | B_1) + P(B_2)P(\bar{A} | B_2) + P(B_3)P(\bar{A} | B_3)} = \frac{0.8 \times 0.01}{0.0125} = 0.64$$

因此, 若李教授晚点到达, 则乘飞机的可能性较大。

人员	做事出错的概率	做事的概率	已知出错条件下做事被怀疑的概率
乘坐方式	晚点的概率	乘坐的概率	已知晚点条件下乘坐的概率
汽车 (甲女)	0.03	0.05	0.12
火车 (乙女)	0.02	0.15	0.24
飞机 (赵女)	0.01	0.80	0.64

由上面的表格数据就可以解释：

世说新语(下卷) 贤媛 第十九 (5) 故事中的

这位母亲要求女儿去婆家要少做事，尤其是好事。



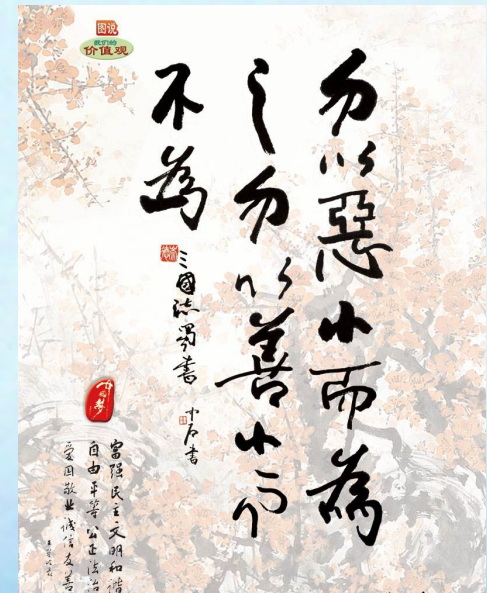


“勿以恶小而为之， 勿以善小而不为”，

这句话讲的是做人的道理。

只要是善，即使是小善也要做；

只要是“恶”，即使是小恶也不能做。



4. 课后思考



问题一 例1的问题还可能出现哪些情况的组合？

情况	问题1	问题2
1	求迟到的概率	已知迟到，求3种交通工具的概率
2	求迟到的概率	已知正点到达，求3种交通工具的概率
3	求正点到达的概率	已知迟到，求3种交通工具的概率
4	求正点到达的概率	已知正点到达，求3种交通工具的概率

4. 课后思考

问题二 “狼来了” 的故事



一个小孩每天到山上放羊，山里有狼出没。

第一天，他在山上喊“狼来了！狼来了！”，山下的村民闻声便去打狼，发现狼没有来；

第二天仍是如此；

第三天，狼真的来了，可无论小孩怎么喊叫，也没有人来救他，因为前两次他说了谎，人们不再相信他了。

你能用贝叶斯公式来解释村民对这个小孩的可信程度是如何下降的？

5. 小结

条件概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ $\longrightarrow$ 乘法定理

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

全概率公式

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式 $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}, i = 1, 2, \cdots, n$

谢 谢!