

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____

所在单位_____

授课班级_____

专业_____

撰写时间_____

教案编号	11-0401	教案内容	4.1 数学期望	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 能表述数学期望的概念及性质，掌握离散型随机变量和连续型随机变量的数学期望的计算方法，能够求随机变量函数的数学期望； (2) 熟记常见离散型随机变量的分布（两点分布、二项分布、泊松分布）和连续型随机变量的分布（均匀分布、指数分布和正态分布）的数学期望。			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性； 2. 具体体现在：本章涉及到很多积分、导数、函数、反函数等的概念和计算。更加适用于实际工程问题。			
教学重点	(1) 离散型随机变量和连续型随机变量的数学期望的计算方法， (2) 常见离散型、连续型随机变量分布的数学期望。				
教学难点	离散型随机变量和连续型随机变量的数学期望的计算方法，				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：旧知识点复习和新课内容概述（5 分钟） 在上一章中，我们主要学习了一维、二维随机变量的概念和分布，以及随机变量的函数的分布；函数级数、定积分以及二重积分的计算。 分布全面的描述了随机变量取值的统计规律性，由分布还可以随机变量的均值、方差、分位数等特征数，这些特征数从一个侧面描述了分布的特征. 本节介绍随机变量最重要的特征数—数学期望。 第二部分：数学期望（40 分钟） 引例：一批钢筋共有 10 根，抗拉强度指标为 120 和 130 的各有 2 根，125 的有 3 根，110、135 及 140 的各有 1 根，则它们的平均抗拉强度指标为：					板 书， 回 顾

$$\begin{aligned}
 & (110+120\times 2+125\times 3+130\times 2+135+140)\times \frac{1}{10} \\
 & =110\times \frac{1}{10}+120\times \frac{2}{10}+125\times \frac{3}{10}+130\times \frac{2}{10}+135\times \frac{1}{10}+140\times \frac{1}{10}=126
 \end{aligned}$$

从上述计算看到：平均抗拉强度指标并不是这 10 根钢筋所取到的这 6 个抗拉强度指标的简单平均，而是以取这些值的次数与试验次数的比值（频率）为权重的加权平均。如此计算所得的平均值，叫做**加权平均值**，

一、数学期望的定义

1. 离散型随机变量数学期望的定义：

设离散随机变量 X 的分布律为

$$P(X=x_k)=p_k, \quad k=1,2,\cdots$$

如果 $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| p(x_k) < +\infty$. （绝对收敛级数满足交换律，一般收敛级数不满足交

换律），则称 $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p(x_k)$ (1.1)

为离散随机变量 X 的**数学期望，期望或均值**。

由定义中，要求级数绝对收敛的目的在于数学期望唯一。

例 1：已知 X 的分布列为：

X	-2	0	1	2
P_i	$\frac{9}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$

。求 $E(X)$

解：由数学期望的定义知：

$$E(X) = (-2) \times \frac{9}{20} + 0 \times \frac{5}{20} + 1 \times \frac{5}{20} + 2 \times \frac{1}{20} = -\frac{11}{20}$$

2. 连续型随机变量数学期望的定义：

设连续随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$ ，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty$$

则称 $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ (1.2)

为随机变量 X 的**数学期望**。

例 2：设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{27}{x^3} & x > 3 \\ 0 & x \leq 3 \end{cases}$ ，求 $E(X)$

解：由于概率密度 $f(x)$ 在连续点满足 $F'(x) = f(x)$ ，故

重点

$$f(x) = \begin{cases} \frac{81}{x^4} & x > 3 \\ 0 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{所以, } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_3^{+\infty} x \cdot \frac{81}{x^4} dx = -\frac{81}{2x^2} \Big|_3^{+\infty} = \frac{9}{2}$$

二、常见分布的数学期望

1. 二项分布

设 $X \sim b(n, p)$, 求 $E(X)$.

解 因为 X 的概率分布为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$, 所以

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时的二项分布就是 0-1 分布, 所以 0-1 分布的数学期望是 $E(X) = p$.

2. 泊松分布

设 $X \sim P(\lambda) (\lambda > 0)$, 求 $E(X)$.

解 因为 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$, 所以

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \quad (\text{令 } t = k-1) \\ &= \lambda \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

此例说明泊松分布中的参数 λ 就是随机变量 X 的数学期望.

3. 均匀分布

设 $X \sim U(a, b)$, 则 $E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$,

4. 指数分布

设 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} x d(-e^{-\lambda x}) = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

5. 正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 故 $E(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$,

三、随机变量函数的数学期望

设 X 为一随机变量, 下面研究 X 的函数 $Y = g(X)$ 的数学期望. 当然, 我们可以先由 X 的分布算出 Y 的分布, 然后按公式来计算 $E(Y)$. 但实际上可由下面定理直接计算 $E(Y)$, 而不必求出 Y 的分布.

定理 1 设 $Y = g(X)$, 这里 $g(X)$ 是一个连续的实函数.

(1) 设 X 是离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \dots$, 若

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k \text{ 绝对收敛, 则 } E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k.$$

(2) 设 X 是连续型随机变量, 其密度函数为 $f(x)$. 若无穷限非正常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \text{ 绝对收敛, 则 } E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.$$

四、二维随机变量 (X, Y) 的数学期望

以下介绍二维随机变量 (X, Y) 的数学期望.

定义 3 如果随机变量 X, Y 的数学期望均存在, 那么称 $(E(X), E(Y))$ 为二维随机变量 (X, Y) 的数学期望.

定理 2 设 $Z = f(X, Y)$ 是随机变量 X, Y 的连续函数, 于是 Z 也是随机变量.

(1) 若 (X, Y) 为离散型随机变量, 则

$$E(Z) = E[f(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) f(x_i, y_j).$$

这里要求右边的级数绝对收敛, 其中 $f(x_i, y_j)$ 为 (X, Y) 的概率分布.

(2) 若 (X, Y) 为连续型随机变量, 则

$$E(Z) = E[f(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy.$$

这里要求右边积分绝对收敛, 其中 $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的概率密度.

特别地, 当 (X, Y) 为离散型随机变量时, 有

$$E(X) = \sum_i x_i f_X(x_i) = \sum_i \sum_j x_i f(x_i, y_j), \quad E(Y) = \sum_j y_j f_Y(y_j) = \sum_j \sum_i y_j f(x_i, y_j)$$

PPT

其中 $f_X(x_i), f_Y(y_j)$ 为边缘概率分布列.

当 (X, Y) 为连续型随机变量时, 有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy,$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy.$$

其中 $f_X(x), f_Y(y)$ 为边缘概率密度.

五、数学期望的性质

以下, 在假设各个随机变量的数学期望存在的情况下, 研究数学期望的一些性质.

性质 1 设 c 为一常数, 则 $E(c) = c$.

性质 2 设 X 为一随机变量, c 是一个常数, 则 $E(cX) = cE(X)$.

性质 3 设 X, Y 是任意两个随机变量, 则 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

特例: 设 X 为一随机变量, b, c 是任意常数, 则 $E(bX + c) = bE(X) + c$.

性质 4 设随机变量 X, Y 相互独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

PPT

PPT

课后作业

p84: 2,3,4,7,9; 数值实验作业、其它要求

课后小结

以下几个方面应该着重强调:

1. 二维随机变量联合分布的几何意义;
2. 边缘分布的含义以及与一维分布的关系;
3. 边缘分布和联合分布的关系。