

克莱默法则



李艳艳

数学与工程学院

克萊默法則

2

数学家孙子在《孙子算经》中记载了“鸡兔同笼”问题

今有鸡兔同笼
上有三十五头
下有九十四足
问鸡兔各几何？



» 克莱默法则

3

今有鸡兔同笼

上有三十五头

下有九十四足

问鸡兔各几何？

假设鸡有 x 只，兔子有 y 只？

$$x + y = 35$$

◀

$$2x + 4y = 94$$



➤➤ 明代数学家程大位的《算法统宗》里有一道著名算题。

一百馒头一百僧
大僧三个更无争
小僧三人分一个
大小和尚各几丁？



» 克莱默法则

一百馒头一百僧
大僧三个更无争
小僧三人分一个
大小和尚各几丁？

假设大和尚有 x 人，小和尚有 y 人。

$$x + y = 100$$

$$3x + \frac{1}{3}y = 100$$



克萊默法則

考虑二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

为消去 x_2 ，用 a_{22} 和 a_{12} 分别乘方程的左右两边，
然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同理，消去 x_1 ，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 得方程组的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为方便叙述和记忆，利用二阶行列式的定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

于是，当 $D \neq 0$ 时，方程组的解为

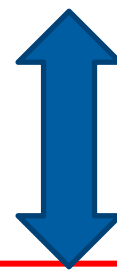
$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$



$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$



$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

进一步认识，分子分母的构成

$$\begin{cases} \underline{a_{11}}x_1 + \underline{a_{12}}x_2 = \underline{b_1} \\ \underline{a_{21}}x_1 + \underline{a_{22}}x_2 = \underline{b_2} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是，当 $D \neq 0$ 时，方程组的解为 $x_1 = \frac{D_1}{D}$ $x_2 = \frac{D_2}{D}$

克萊默法則

11

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$D \neq 0$ 方程组的解为

$$\frac{D_1}{D} \quad \frac{D_2}{D}$$

三元一次线性方程组

是否都成立？

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

n元
一次
线性
方程
组





科普小知识



克莱默(Cramer, Gabriel, 1704.7.31-1752.1.4)瑞士数学家。他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重。

主要著作是《代数曲线的分析引论》(1750)，首先定义了正则、非正则、超越曲线和无理曲线等概念。为了确定经过5个点的一般二次曲线的系数，应用了著名的“克莱默法则”，即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式。

» 克莱默法则

定理（Cramer（克莱默）法则）：

对于含有n个方程n个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则，方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad j=1,2,\cdots;n$$

其中, D_j 是把系数行列式 D 的第 j 列元素换成方程右端的常数项 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 所得的 n 阶行列式 ($j=1, 2, \dots, n$)

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cramer (克莱姆) 法则) 需要注意的几点

1. 方程个数=未知数个数

2. 系数行列式不为零

例1 $x+y=35$

<

$$2x+4y=94$$

解： 方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 1 \times 4 - 1 \times 2 = 2 \neq 0$$

由克莱默法则知，方程有唯一解

$$D_1 = \begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 94 & 4 \end{vmatrix} = 46 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 2 & 94 \end{vmatrix} = 24$$

故，方程组的解为 $x = \frac{D_1}{D} = 23 \quad y = \frac{D_2}{D} = 12$



设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零, 则称此方程组为
非齐次线性方程组; 若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零, 则称
此方程组为**齐次线性方程组**;

(2)

易知, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 一定是(2)的解, 称为零解。

若有一组不全为零的数是(2)的解，称为非零解。



定理2: 如果线性方程组(1)无解或有解但不唯一, 则它的系数行列式必为零.

定理3: 如果齐次线性方程组(3)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 则齐次线性方程组(3)没有非零解.

定理4: 如果齐次线性方程组(3)有非零解, 则它的系数行列式 D 必为零.



例1: 用克拉默法则解方程组

21

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \quad \quad - 6x_4 = 9 \\ \quad \quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} r_1 - 2r_2 \\ \hline r_4 - r_2 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \begin{array}{c} c_1 + 2c_2 \\ \hline c_3 + 2c_2 \end{array} - \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27, \end{aligned}$$



$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 81,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -27,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -108,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 27,$$

所以 $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3,$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

思考题

当线性方程组的系数行列式为零时, 能否用克拉默法则解方程组? 此时方程组的解为何?

思考题解答

不能. 此时方程组可能为无解, 或有无穷多解.

课堂小结

1. 克莱默法则适用的条件

(1) 方程个数=未知数个数；

(2) 系数行列式不为零。

2. 克莱默法则是线性方程组理论中，一个非常重要的结果。它不仅肯定了满足定理条件的线性方程组有唯一解，且给出了唯一解对线性方程组系数和常数项的依赖关系。

课堂小结

3. 局限性

(1) 计算 $n+1$ 个 n 阶行列式， n 很大时，计算量非常大；

(2) 方程个数不等于未知数个数，或系数行列式等于零时，克莱默法则失效。

