

机械更新零件年龄与剩余寿命的探讨

机械由于不停的使用以及自然损耗,有些零件需要不停的更换。于是这些需要不停更换的零件的寿命就成为我们关注的目标,同时在一段时间需要更换多少相同的零件也成为我们注目的焦点。现在我们用随机过程的观点来探讨这些问题。

我们先从泊松过程的角度来考虑。参数 λ 的泊松过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 可以作为某机械设备中某种零件更新数的数学模型,即 $X(t)$ 可表示在时间间隔 $[0, t)$ 中更新某种零件的个数。假定 T_i 表示第 i 个零件的寿命, $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ 表示前 n 个零件的寿命总和,则可设

$\alpha_t = t - S_{X(t)}$ 与 $\beta_t = S_{X(t)+1} - t$, 分别表示时刻 t 零件的年龄与剩余寿命。对于 α_t 与 β_t 有下面结论。

结论 1: β_t 服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。

结论 2: $P\{\alpha_t = t\} = e^{-\lambda t}$, $P\{\beta_t < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, $0 < x \leq t$

一旦确定参数 λ , 就可以确定时刻 t 零件的年龄与剩余寿命的分布。

我们也可以从更新过程的角度考虑。这里首先假定 ξ_n 为第 n 个零件的寿命, S_n 为第 n 个零件更换的时刻, 同时假定 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 具有相同的分布 $F(x)$, 记 $N(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$, $N(0)=0$, $\{N(t), t \geq 0\}$ 就是更新过程, 相同的分布 $F(x)$ 就是更新分布。 $N(t)$ 表示在时间 $[0, t)$ 中更换相同零件的次数。对于更新过程有下面的结论。

结论 3: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \begin{cases} 1/b, & b < \infty \\ 0, & b = \infty \end{cases}$, 这里 $b = \int_0^\infty t dF(t)$ 。

结论 4: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \begin{cases} 1/b, & b < \infty \\ 0, & b = \infty \end{cases}$, 这里 $b = \int_0^\infty t dF(t)$ 。

许多零件的寿命都服从参数为 λ 的泊松分布, 这是上面的结论变为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\lambda}$$