

第 1 章 概率论基础

(A)

一、填空题

1. 写出下面随机事件的样本空间：

(1) 同时掷 2 颗骰子，记录它们的点数之和 . _____ ；

(2) 袋中有 5 只球，其中 3 只白球 2 只黑球，从袋中任意取一球，观察其颜色 . _____ ；

(3) 袋中有 5 只球，其中 3 只白球 2 只黑球，从袋中不放回任意取 3 只球，记录取到的黑球个数 . _____ ；

(4) 测量一辆汽车通过某一测速点时的速度 . _____ .

2. 设 Ω 为样本空间， A, B, C 是任意的三个随机事件，根据概率的性质，则

(1) $P(\bar{A}) =$ _____ ；

(2) $P(B - A) = P(B \bar{A}) =$ _____ ；

(3) $P(A \cup B \cup C) =$ _____ .

3. 设 A, B, C 是三个随机事件，试以 A, B, C 来表示下列事件：

(1) 仅有 A 发生 _____ ；

(2) A, B, C 中至少有一个发生 _____ ；

(3) A, B, C 中恰有一个发生 _____ ；

(4) A, B, C 中最多有一个发生 _____ ；

(5) A, B, C 都不发生 _____ ；

(6) A 不发生， B, C 中至少有一个发生 _____ .

4. A, B, C 是三个随机事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$ ， $P(AC) = 1/8$ ； $P(AB) = P(BC) = 0$ ，则

(1) A, B, C 中至少有一个发生的概率为 _____ ；

(2) A, B, C 都发生的概率为 _____ ；

(3) A, B, C 都不发生的概率为 _____ .

5. 袋中有 n 只球，记有号码 $1, 2, 3, \dots, n$ ($n > 5$) . 则事件

(1) 任意取出两球，号码为 $1, 2$ 的概率为 _____ ；

(2) 任意取出三球，没有号码为 1 的概率为 _____ ；

(3) 任意取出五球，号码 $1, 2, 3$ 中至少出现一个的概率为 _____ .

6. 从一批由 5 件正品，5 件次品组成的产品中，任意取出三件产品，则其中恰有一件次品的概率为 _____ .

7. $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个事件组，若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥，且 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，则对 Ω 中的事件 B 有

(1) 全概率公式 _____ ；

(2) 贝叶斯公式为_____.

8. 两事件 A, B 相互独立的充要条件为_____ ; A, B, C 三事件相互独立的充要条件为_____.

9. 已知在 10 只晶体管中, 有 2 只次品, 在其中取两次, 每次随机地取一只, 做不放回抽样, 则

(1) 两只都是正品的概率为_____ ;

(2) 一只正品, 一只为次品的概率为_____ ;

(3) 两只都为次品的概率为_____ ;

(4) 第二次取出的是次品的概率_____.

10. 从厂外打电话给这个工厂的一个车间, 要由总机转入. 若总机打通的概率为 0.6, 车间分机占线的概率为 0.3, 假定两者是独立的, 从厂外向车间打电话能打通的概率为_____.

11. A, B 是两个随机事件, 且 $P(A) = 0.4, P(A \cap B) = 0.7$

(1) 若 A 与 B 互不相容, 则 $P(B) =$ _____ ;

(2) 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(B) =$ _____.

12. 若 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(B|A) = 0.8$, 则 $P(\overline{A \cup B}) =$ _____.

13. 一袋中有 2 个黑球和若干个白球, 现有放回地摸球 4 次, 每次摸一个, 若至少摸到一个白球的概率是 $80/81$, 则袋中白球的个数是_____.

二、单项选择题

1. 设 A, B 和 C 是任意 3 事件, 则下列选项中正确的是 ().

(A) 若 $A \cap C = B \cap C$, 则 $A = B$

(B) 若 $A - C = B - C$, 则 $A = B$

(C) 若 $AB = \emptyset$ 且 $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, 则 $\overline{A} = \overline{B}$

(D) 若 $AC = BC$, 则 $A = B$

2. 设 A, B 是任意二事件, 则下列各选项中错误的是 ().

(A) 若 $AB = \emptyset$, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 可能不相容

(B) 若 $AB = \emptyset$, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也可能相容

(C) 若 $AB \neq \emptyset$, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也可能相容

(D) 若 $AB \neq \emptyset$, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 一定不相容

3. 设 A 和 B 是任意两互不相容事件, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则必有 ().

(A) $P(A \cup \overline{B}) = P(\overline{B})$

(B) $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容

(C) $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容

(D) $P(A \cap \overline{B}) = P(B)$

4. 设 A_1, A_2 和 B 是任意事件, $0 < P(B) < 1, P(A_1 \cap A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$, 则 ().

(A) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

(B) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

(C) $P(A_1 \cap A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

(D) $P(A_1 \cap A_2|\overline{B}) = P(A_1|\overline{B}) + P(A_2|\overline{B})$

5. 对于任意二事件 A 和 B , 若 $P(AB) = 0$, 则必有 ().

(A) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$

(B) $P(A - B) = P(A)$

(C) $P(A)P(B) = 0$

(D) $\overline{A}\overline{B} \neq \emptyset$

6. 设事件 A, B, C 有包含关系: $A \subset C, B \subset C$, 则 ().

(A) $P(C) = P(AB)$

(B) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

(C) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$

(D) $P(C) = P(A \cup B)$

7. 设事件满足条件: $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\overline{A})$, 则 ().

(A) $P(A|B) = P(\overline{A}|B)$

(B) $P(A|B) \neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB) \neq P(A)P(B)$

(D) $P(AB) = P(A)P(B)$

8. 将一枚硬币独立地掷两次, 引进事件 $A_1 =$ “掷第一次出现正面”, $A_2 =$ “掷第二次出现正面”, $A_3 =$ “正、反面各出现一次”, $A_4 =$ “正面出现两次”, 则事件 ().

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立

(B) A_2, A_3, A_4 相互独立

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立

(D) A_2, A_3, A_4 两两独立

9. 对于任意二事件 A 和 B , 则

(A) 若 $AB \neq \emptyset$, 则 A, B 一定独立

(B) 若 $AB \neq \emptyset$, 则 A, B 有可能独立

(C) 若 $AB = \emptyset$, 则 A, B 一定独立

(D) 若 $AB = \emptyset$, 则 A, B 一定不独立

10. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有

(A) $P(A \cup B) > P(A)$

(B) $P(A \cup B) > P(B)$

(C) $P(A \cup B) = P(A)$

(D) $P(A \cup B) = P(B)$

三、解答题

1. 设 $P(AB) = 0$, 则下列说法哪些是正确的?

(1) A 和 B 互不相容;

(2) A 和 B 相容;

(3) AB 是不可能事件;

(4) AB 不一定是可能事件;

(5) $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$

(6) $P(A - B) = P(A)$

2. 设 A, B 是两事件, 且 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$, 问:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值, 最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值, 最小值是多少?

3. 已知事件 A, B 满足 $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$, 记 $P(A) = p$, 试求 $P(B)$.

4. 已知 $P(A) = 0.7, P(A - B) = 0.3$, 试求 $P(\overline{AB})$.

5. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

6. 在房间里有 10 个人, 分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章, 任取 3 人记录其纪念章的号码. 求:

(1) 求最小号码为 5 的概率;

(2) 求最大号码为 5 的概率.

7. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去, 求杯子中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

8. 设 5 个产品中有 3 个合格品, 2 个不合格品, 从中不放回地任取 2 个, 求取出的 2 个中全是合格品, 仅有一个合格品和没有合格品的概率各为多少?

9. 口袋中有 5 个白球, 3 个黑球, 从中任取两个, 求取到的两个球颜色相同的概率.

10. 若在区间 $(0, 1)$ 内任取两个数, 求事件“两数之和小于 $6/5$ ”的概率.

11. 随机地向半径为 a 的半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

12. 已知 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(A \cup B)$.

13. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件产品中有一件是不合格品, 则另一件也是不合格品的概率是多少?

14. 有两个箱子, 第 1 箱子有 3 个白球 2 个红球, 第 2 个箱子有 4 个白球 4 个红球, 现从第 1 个箱子中随机地取 1 个球放到第 2 个箱子里, 再从第 2 个箱子中取出一个球, 此球是白球的概率是多少? 已知上述从第 2 个箱子中取出的球是白球, 则从第 1 个箱子中取出的球是白球的概率是多少?

15. 将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去, 接收站收到时, A 被误收作 B 的概率为 0.02, 而 B 被误收作 A 的概率为 0.01, 信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2:1, 若接收站收到的信息是 A , 问原发信息是 A 的概率是多少?

16. 三人独立地去破译一份密码, 已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少?

17. 设事件 A 与 B 相互独立, 已知 $P(A) = 0.4, P(A \cap B) = 0.7$, 求 $P(\overline{B}|A)$.

18. 甲乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中, 则它是甲射中的概率是多少?

19. 某零件用两种工艺加工, 第一种工艺有三道工序, 各道工序出现不合格品的概率分别为 0.3, 0.2, 0.1; 第二种工艺有两道工序, 各道工序出现不合格品的概率分别为 0.3, 0.2, 试问:

(1) 用哪种工艺加工得到合格品的概率较大些?

(2) 第二种工艺两道工序出现不合格品的概率都是 0.3 时, 情况又如何?

(B)

1. 设两两相互独立的三事件 A, B 和 C 满足条件 $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, 且已知 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 求 $P(A)$.

2. 设事件 A, B, C 的概率都是 $\frac{1}{2}$, 且 $P(ABC) = P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$, 证明:

$$2P(ABC) = P(AB) + P(AC) + P(BC) - \frac{1}{2}.$$

3. 设 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 试证 A 与 B 独立.

4. 设 A, B 是任意两事件, 其中 A 的概率不等于 0 和 1, 证明 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

5. 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 p , 若第一次及格则第二次及格的概率也为 p ; 若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{p}{2}$;

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格, 求他取得该资格的概率.

(2) 若已知他第二次及格了, 求他第一次及格的概率.

6. 每箱产品有 10 件, 其中次品从 0 到 2 是等可能的, 开箱检验时, 从中任取一件, 如果检验为次品, 则认为该箱产品为不合格而拒收. 由于检验误差, 一件正品被误判为次品的概率为 2%, 一件次品被误判为正品的概率为 10%. 求检验一箱产品能通过验收的概率.

7. 用一种检验法检验产品中是否含有某种杂质的效果如下. 若真含有杂质检验结果为含有的概率为 0.8; 若真不含有杂质检验结果为不含有的概率为 0.9; 据以往的资料知一产品真含有杂质或真不含有杂质的概率分别为 0.4 和 0.6. 今独立地对一产品进行三次检验, 结果是两次检验认为含有杂质, 而有一次认为不含有杂质, 求此产品真含有杂质的概率.

8. 火炮与坦克对战, 假设火炮与坦克依次发射, 且由火炮先射击, 并允许火炮与坦克各发射 2 发, 已知火炮与坦克每次发射的命中概率不变, 它们分别等于 0.3 和 0.35. 我们规定只要命中就被击毁. 试问

(1) 火炮与坦克被击中的概率各等于多少?

(2) 都不被击毁的概率等于多少?

9. 甲、乙、丙三人进行比赛, 规定每局两个人比赛, 胜者与第三人比赛, 依次循环, 直至有一人连胜两次为止, 此人即为冠军, 而每次比赛双方取胜的概率都是 $\frac{1}{2}$, 现假定甲乙两人先比, 试求各人得冠军的概率.