



## 第一节 矩阵的初等变换



## 第二节 矩阵的秩



## 第三节 线性方程组的解

本章先讨论矩阵的初等变换，建立矩阵的秩的概念，并提出求秩的有效方法。再利用矩阵的秩反过来研究齐次线性方程组有非零解的充分必要条件和非齐次线性方程组有解的充分必要条件，并介绍用初等变换解线性方程组的方法。内容丰富，难度较大。

# 线性方程组



## 消元解法

## 矩阵的初等变换



西汉数学家刘徽在《九章算术·方程术》中详细的陈述了消元解法，在注中，他提出了解线性方程组的新方法，运用了比率算法的思想。这本书的起源最早可以追述到战国时期。



高斯（德国）  
(1777.4.30- 1855.2.23)  
相当于乾隆年间



若尔当, C.

若尔当（法国）  
(1838.1.5-1922.1.22)  
相当于咸丰年间

# 第一节 矩阵的初等变换

## 主要内容

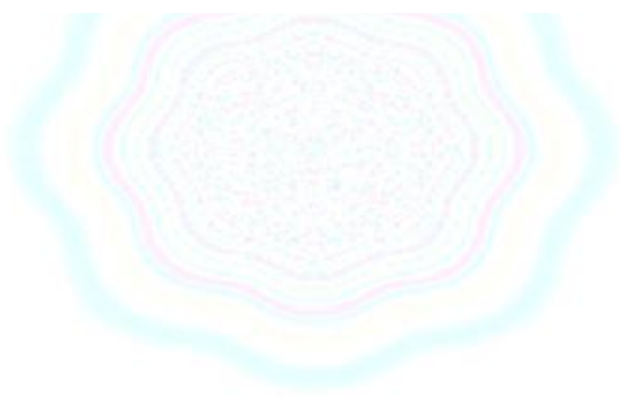
初等变换

行最简形矩阵和标准形矩阵

初等矩阵的定义和性质

求逆矩阵的初等变换法

# 矩阵的初等变换



矩阵的初等变换是矩阵的一种十分重要的运算,它在解线性方程组、求逆矩阵及矩阵理论的探讨中都可起重要的作用. 为引进矩阵的初等变换,先来分析用消元法解线性方程组的例子.

# 一、消元法解线性方程组

分析：用消元法解下列方程组的过程。

引例 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & \textcircled{3} \div 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & \textcircled{4} \end{cases} \quad (1)$$

解

$$(1) \xrightarrow[\textcircled{3} \div 2]{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \left\{ \begin{array}{l} \cancel{x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4}, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, \end{array} \right. \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} (B_1)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{4} - 3\textcircled{1}]{\begin{array}{l} \textcircled{2} - \textcircled{3} \\ \textcircled{3} - 2\textcircled{1} \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{x_1} + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ \cancel{-2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0}, \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, \end{array} \right. \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} (B_2)$$

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{2} \times \frac{1}{2} \\
 \hline
 \textcircled{3} + 5\textcircled{2} \\
 \textcircled{4} - 3\textcircled{2}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \textcircled{1} \\
 \textcircled{x_2} - x_3 + x_4 = 0, & \textcircled{2} \\
 2x_4 = -6, & \textcircled{3} \\
 x_4 = -3, & \textcircled{4}
 \end{cases}
 \quad (B_3)$$

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{4} \\
 \hline
 \textcircled{4} - 2\textcircled{3}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \textcircled{1} \\
 x_2 - x_3 + x_4 = 0, & \textcircled{2} \\
 \textcircled{x_4} = -3, & \textcircled{3} \\
 0 = 0, & \textcircled{4}
 \end{cases}
 \quad (B_4)$$

用“回代”的方法求出解：

于是解得 
$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad \text{其中 } x_3 \text{ 为任意取值.}$$

或令  $x_3 = c$ , 方程组的解可记作

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + 4 \\ c + 3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{即 } x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中  $c$  为任意常数.

## 小结：

1. 上述解方程组的方法称为消元法.
2. 始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换
  - (1) 交换方程次序；  
( $i$  与  $j$  相互替换)
  - (2) 以不等于 0 的数乘某个方程；  
(以  $i \times k$  替换  $i$ )
  - (3) 一个方程加上另一个方程的  $k$  倍.  
(以  $i + k j$  替换  $i$ )

3. 上述三种变换都是可逆的.

若  $(A) \xrightarrow{\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}} (B)$ , 则  $(B) \xrightarrow{\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}} (A)$ ;

若  $(A) \xrightarrow{\textcircled{i} \times k} (B)$ , 则  $(B) \xrightarrow{\textcircled{i} \div k} (A)$ ;

若  $(A) \xrightarrow{\textcircled{i} + k \textcircled{j}} (B)$ , 则  $(B) \xrightarrow{\textcircled{i} - k \textcircled{j}} (A)$ .

由于三种变换都是可逆的, 所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的. 故这三种变换是同解变换.

因为在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算。

若记

$$B = (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

则对方程组的变换完全可以转换为对矩阵 $B$ (方程组(1)的增广矩阵)的变换。

## 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

我们把上边的语言翻译成矩阵语言，一一对应的看一下。

对应的增广矩阵

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

最后一个方程组有唯一解，它和原方程组是同解方程组，所以原方程组有唯一解  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 4$ .

而从此例看到，对方程组实施上面三种变换，等价于对方程组的增广矩阵的行实施了类似地三种变换，即交换两行、某一行乘以一个非零数（即某一行的每个元素都乘以同一个数）、某一行的 $k$ 倍加到另一行上（即某一行的每个元素都乘以数 $k$ ，再加到另一行的对应元素上）。

## 二、初等变换的定义

**定义 1** 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(i) 对调两行(对调  $i, j$  两行, 记作  $r_i \leftrightarrow r_j$ );

(ii) 以数  $k \neq 0$  乘某一行中的所有元素

(第  $i$  行乘  $k$ , 记作  $r_i \times k$ );

(iii) 把某一行所有元素的  $k$  倍加到另一行对应的元素上去(第  $j$  行的  $k$  倍加到第  $i$  行上, 记作  $r_i + kr_j$ ).

同理可定义矩阵的初等列变换(所用记号是把“ $r$ ”换成“ $c$ ”).

**定义2** 矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换.

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \text{逆变换} \quad r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \quad \text{逆变换} \quad r_i \times \left(\frac{1}{k}\right) \text{ 或 } r_i \div k;$$

$$r_i + kr_j \quad \text{逆变换} \quad r_i + (-k)r_j \text{ 或 } r_i - kr_j.$$

用矩阵的初等行变换 解方程组 (1) :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3 \div 2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$\begin{array}{l}
 r_2 - r_3 \\
 r_3 - 2r_1 \\
 r_4 - 3r_1
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & -2 & -2 & 4 \\
 0 & -2 & -2 & 2 \\
 0 & -5 & -5 & 2 \\
 0 & -9 & -3 & 9
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 r_2 \div 2 \\
 r_3 \div 2 \\
 r_4 \div 3
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & -2 & -2 & 4 \\
 0 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & -5 & -5 & 2 \\
 0 & -3 & -1 & 3
 \end{pmatrix}
 = B_2$$

$$\begin{array}{l}
 r_2 \div 2 \\
 r_3 - 5r_2 \\
 r_4 - 3r_2
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -3
 \end{pmatrix}
 = B_3$$

$$\begin{array}{l} r_3 \leftrightarrow r_4 \\ \underline{B_3} = \\ r_4 - 2r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & -12 & 14 \\ 0 & 10 & -11 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} \leftrightarrow r_4 \\ = \underline{B_4} \\ -2r_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ \underline{\phantom{r_2 - r_3}} \\ r_2 - r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

$B_5$  对应的方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

或令  $x_3 = c$ , 方程组的解可记作

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + 4 \\ c + 3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

其中  $c$  为任意常数 .

### 三、两个矩阵的等价关系

1. 定义 如果矩阵  $A$  经有限次初等行变换变成矩阵  $B$ , 就称矩阵  $A$  与  $B$  行等价, 记作  $A \overset{r}{\sim} B$ ; 如果矩阵  $A$  经有限次初等列变换变成矩阵  $B$ , 就称矩阵  $A$  与  $B$  列等价, 记作  $A \overset{c}{\sim} B$ ; 如果矩阵  $A$  经有限次初等变换变成矩阵  $B$ , 就称矩阵  $A$  与  $B$  等价, 记作  $A \sim B$ .

## 2. 等价关系的性质

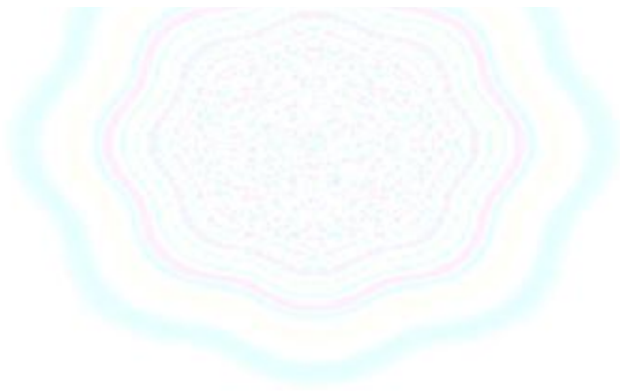
(i) 反身性  $A \sim A$ ;

(ii) 对称性 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$ ;

(iii) 传递性 若  $A \sim B, B \sim C$ , 则  $A \sim C$ .

数学中把具有上述三条性质的关系称为等价, 例如两个线性方程组同解, 就称这两个线性方程组等价.

# 行最简形矩阵和标准形矩阵





**思考：**

对应线性方程组的求解过程思考，当对一个矩阵做初等行变换时，变换到什么**程度**或什么**样子**，可以**暂时停一停或歇歇脚**？变换到什么**程度**就**完成了任务**？

我们看看下面的三个例子，它们表示线性方程组的求解做到了那一步？

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

进一步认识，找出它们的共同特点

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

行阶梯  
形矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1. 行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 零行：元素全为零的行；
2. 非零行：元素不全为零的行；
3. 非零首元：非零行第一个不为零的元素；
4. 行阶梯形矩阵

a. 若有零行，则零行在最下方

b. 非零首元的列指标随着行指标的增加而严格递增

**注：**任何一个矩阵都可以经过初等行变换化为行阶梯形。

**思考：**

对应线性方程组的求解过程继续思考，当把一个矩阵初等行变换到行阶梯形就表示该**方程组**的**解**求出来了吗？

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**回答：显然不是**

行阶梯形仅表示完成了消元的过程，我们还要进行**回代**，才能完成线性方程组的求解。

下面，我们通过前面的一个例子看看，回代之后，会出现什么类型的矩阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & \textcircled{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

行最  
简形  
矩阵

## 2. 行最简形矩阵

1. 是行阶梯形；

2. 非零首元都是1；

3. 非零首元所在列的其余元素都是0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

注：任何一个矩阵都可以经过初等行变换化为  
行最简形矩阵.

$A_{m \times n}$ 

初等行变换



行阶梯形



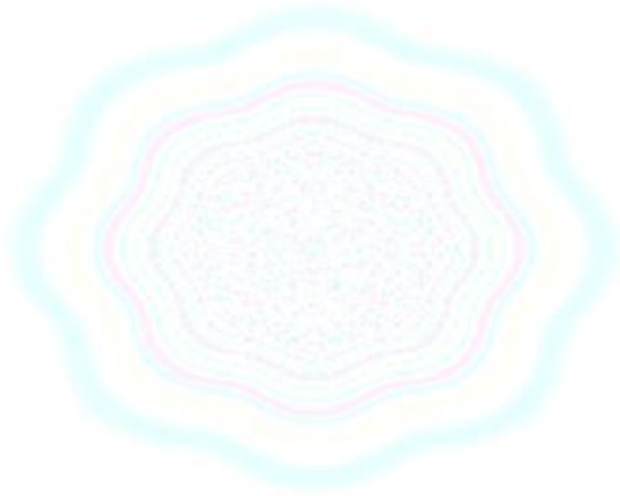
行最简形



初等行变换

### 3.重要结论

**定理** 每一个矩阵都可以经过单纯的初等行变换化为行阶梯形矩阵.



**例1**

将矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$  化为行阶梯形和行最简形矩阵.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

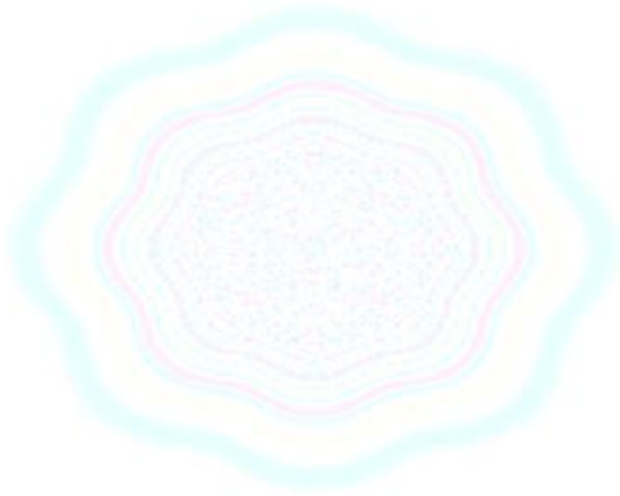
思考：

行最简形矩阵还能继续变换成为更简洁的形式吗？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**定义** 如果一个矩阵的左上角为单位矩阵, 其他位置的元素都为零, 则称这个矩阵为**标准形矩阵**.



**定理** 任何矩阵都可经过单纯的初等行变换化为行最简形矩阵. 任何矩阵都可经过初等变换化为标准形矩阵.

下面我们还是通过例子来说明该定理.

## 课堂小结

(1)行阶梯形矩阵

(2)行最简形矩阵

(3)标准形矩阵

(4)灵活、熟练应用它们对矩阵做等价变换

# 初等矩阵的定义和应用



# 一、初等矩阵的概念

矩阵的初等变换是矩阵的一种基本运算，应用广泛。

**定义** 由单位矩阵  $E$  经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵。

三种初等变换对应着三种初等方阵。

- 1. 对调两行或两列；
- 2. 以数  $k \neq 0$  乘某行或某列；
- 3. 以数  $k$  乘某行（列）加到另一行（列）上去。

# 1、对调两行或两列

对调  $E$  中第  $i, j$  两行, 即  $(r_i \leftrightarrow r_j)$ , 得初等方阵

$$E(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} & 0 & \cdots & & 1 \\ & 1 & & \ddots & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & 1 & \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} & 1 & \cdots & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

交换矩阵的两行(列);

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2、以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数  $k \neq 0$  乘单位矩阵的第  $i$  行 ( $r_i \times k$ ), 得初等矩阵  $E(i(k))$ .

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & k \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

以一个非零数 $k$ 乘矩阵的某一行(列)；

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3、以数 $k \neq 0$ 乘某行(列)加到另一行(列)上去

以  $k$  乘  $E$  的第  $j$  行加到第  $i$  行上 ( $r_i + kr_j$ )

[或以  $k$  乘  $E$  的第  $i$  列加到第  $j$  列上 ( $c_j + kc_i$ ),

$$E(ij(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

把矩阵的某一行(列)的k倍加于另一行(列)上.

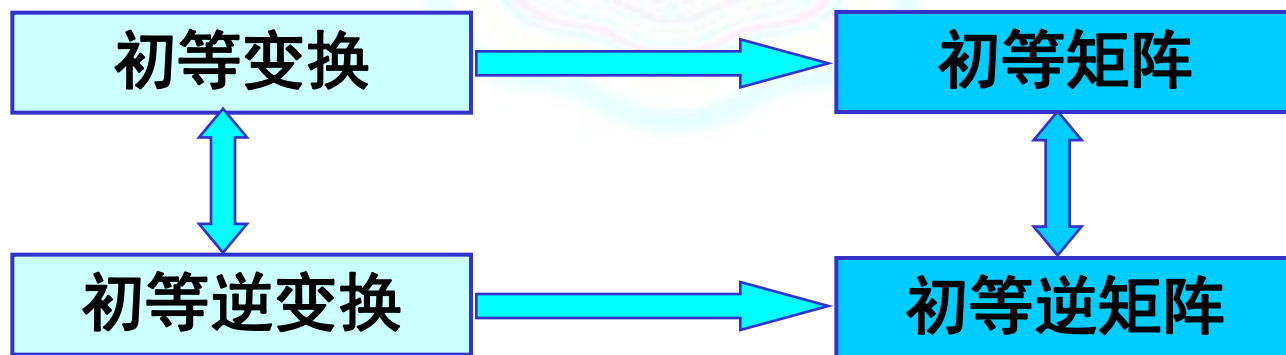
$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**注：**初等矩阵都是可逆的，且它们的逆矩阵仍是初等矩阵。

初等矩阵和我们学过的初等变换之间有什么关系？

## 二、初等矩阵的应用

定理1 设 $A$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 $A$ 施行一次初等行变换，相当于在 $A$ 的左边乘以相应的 $m$ 阶初等矩阵；对 $A$ 施行一次初等列变换，相当于在 $A$ 的右边乘以相应的 $n$ 阶初等矩阵.



请仔细观察下面的问题

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 交换第一行与第二行, 有 } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 交换第一行与第二行, 有 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 给A的第二行乘以}-3 \\ \text{加到第一行, 有}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 给A的第二行乘以}-3 \\ \text{加到第一行, 有}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 归纳：

对  $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$  的行施以一次某种初等变换得到  
的矩阵，等于用同种的  $m$  阶初等矩阵左乘  $A$ .

猜想：要是A的列施以一次某种初等变换得到的矩阵，会等于什么？

将A 的第三列乘2加于第一列，有  $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

将  $E$  的第三列乘2加于第一列，  
有  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 归纳：

对  $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$  的列施以一次某种初等变换得到的矩阵，等于用同种的  $m$  阶初等矩阵右乘  $A$ .

# 初等变换的性质

**定理 1** 设  $A$  与  $B$  为  $m \times n$  矩阵, 那么

(i)  $A \stackrel{r}{\sim} B$  的充要条件是存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$ , 使  $PA = B$ ;

(ii)  $A \stackrel{c}{\sim} B$  的充要条件是存在  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使  $AQ = B$ ;

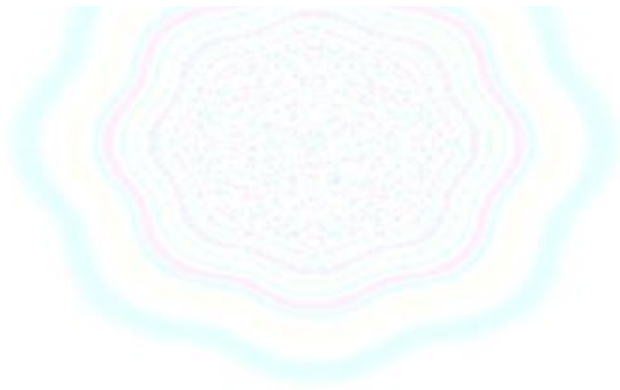
(iii)  $A \sim B$  的充要条件是存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  及  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使  $PAQ = B$ .

定理 1 把矩阵的初等变换与矩阵的乘法运算联系了起来，从而可以依据矩阵乘法的运算规律得到初等变换的运算规律，也可以利用矩阵的初等变换去研究矩阵的乘法.

由定理 1 可得如下推论.

**推论** 方阵  $A$  可逆的充要条件是  $A \sim E$ .

# 初等变换的应用



# 求逆矩阵的初等变换法

**定理 1** 表明, 如果  $A \stackrel{r}{\sim} B$ , 即  $A$  经一系列初等行变换变为  $B$ , 则有可逆矩阵  $P$ , 使  $PA = B$ . 那么, 如何去求出这个可逆矩阵  $P$  呢?

$$\begin{aligned} \text{由于 } PA = B &\iff \begin{cases} PA = B \\ PE = P \end{cases} \iff P(A, E) = (B, P) \\ &\iff (A, E) \stackrel{r}{\sim} (B, P), \end{aligned}$$

因此, 如果对矩阵  $(A, E)$  作初等行变换, 那么, 当把  $A$  变为  $B$  时,  $E$  就变为  $P$ .

特别地，如果  $B = E$ ，则  $P = A^{-1}$ ，即

$$(A, E) \stackrel{r}{\sim} (E, A^{-1}).$$

我们可以采用下列形式求  $A^{-1}$ ：将  $A$  与  $E$  并排放在一起，组成一个  $n \times 2n$  矩阵  $(A, E)$ 。对矩阵  $(A, E)$  作一系列的初等行变换，将其左半部分化为单位矩阵  $E$ ，这时其右半部分就是  $A^{-1}$ 。即

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1}).$$

## 举例

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$  的行最简形矩阵为  $F$ , 求  $F$ ,

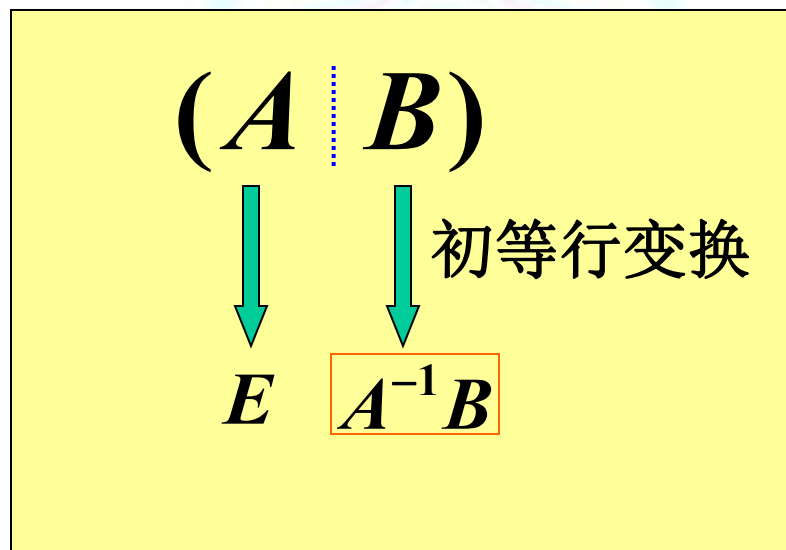
并求一个可逆矩阵  $P$ , 使  $PA = F$ .

**例 2** 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ , 证明  $A$  可逆, 并求  $A^{-1}$ .

利用初等行变换求逆阵的方法，还可用于求矩阵  $A^{-1}B$  .

$$\therefore A^{-1}(A \parallel B) = (E \parallel A^{-1}B)$$

即



### 例 3 求解矩阵方程 $AX = B$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

# 小结

1. 单位矩阵  $\xrightarrow{\text{一次初等变换}}$  初等矩阵.
2. 利用初等变换求逆阵的步骤是:
  - (1) 构造矩阵  $(A:E)$  或  $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ ;
  - (2) 对  $(A:E)$  施行初等行变换, 将  $A$  化为单位矩阵  $E$  后, 右边  $E$  对应部分即为  $A^{-1}$  (或对  $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$  施行初等列变换, 将  $A$  化为单位阵  $E$  后,  $E$  对应部分即为  $A^{-1}$ ).