

## 第二章 矩阵及其运算

### 第 1 节 线性方程组和矩阵

### 第 2 节 矩阵的运算

|         |                                                                                                                                                                                                                                                                    |             |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 教学主要内容  | 1. 矩阵的概念；<br>2. 矩阵的加法和数与矩阵的乘法的定义及应用；<br>3. 矩阵乘法的定义及性质；<br>4. 矩阵的转置；<br>5. 方阵的行列式。                                                                                                                                                                                  |             |
| 教学目标    | <b>【知识目标】</b> ：①理解矩阵的概念，掌握矩阵的加法和数与矩阵的乘法的定义及应用<br>②理解并熟练的掌握矩阵的乘法，掌握矩阵乘法的性质。<br><b>【能力目标】</b> ：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。<br><b>【情感目标】</b> ：通过运用探究式的方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，让学生体会数学问题从抽象到具体的转化过程，体会数学之美，从而激发学生学习数学的兴趣和信心。 |             |
| 教材分析    | 重点                                                                                                                                                                                                                                                                 | 矩阵乘法的定义。    |
|         | 难点                                                                                                                                                                                                                                                                 | 矩阵相乘的计算及性质。 |
| 教学方法与手段 | 多媒体辅助教学和探究式教学法                                                                                                                                                                                                                                                     |             |
| 学习方法    | 学生可利用教师准备的引例，通过对引例的计算，不断观察、分析、探索、归纳总结，推广到一般情况。                                                                                                                                                                                                                     |             |
| 教学学时数   | 4 学时，180 分钟。                                                                                                                                                                                                                                                       |             |

## (一)矩阵的概念

**引例：**矩阵一直被认为是线性代数中最基本的内容，同时也认为是最有用的内容。

先看一个趣味逻辑题（类似这样的小问题幼儿园中班以上的小朋友已经开始接触，不过就是比较初级一些）

问题描述：5 个房子有 5 个门，分别是黄、蓝、红、绿、橙

5 个人物：小明，小红，小兰，小白，小黄

宠物 5 个：蜗牛，小狗，小猫，小白兔，小金鱼

饮料 5 种：水，茶，牛奶，果汁，咖啡

事物 5 种：洋葱，香蕉，苹果，蘑菇，蛋糕

小明住在红门的房子里；

喝牛奶的住在中间房子里；

小白有只小猫，邻居有只小金鱼，

小黄住在最左边的房子里；

住在绿门房子里的喝咖啡；

吃洋葱的住在吃苹果的右边；

小兰喝茶还有只小狗；

吃蛋糕的喝果汁；

绿门房子在最右边，橙门房子在其左边；

吃苹果的邻居有只小狗；

吃蘑菇的有只小蜗牛；

小白吃香蕉；

住在黄门房子里的吃苹果；

小黄的邻居家的房门是蓝色的。

提出问题：谁喝水？谁有只小金鱼？

**做法：**数表

| 信息 \ 房子 | 房子 1 | 房子 2 | 房子 3 | 房子 4 | 房子⑤ |
|---------|------|------|------|------|-----|
| 门       | 黄色   | 蓝色   | 红色   | 橙色   | 绿色  |
| 人物      | 小黄   | 小兰   | 小明   | 小红   | 小白  |
|         |      |      |      |      |     |

|  |    |     |    |     |     |    |
|--|----|-----|----|-----|-----|----|
|  | 宠物 | 小白兔 | 小狗 | 小蜗牛 | 小金鱼 | 小猫 |
|  | 饮料 | 水   | 喝茶 | 牛奶  | 果汁  | 咖啡 |
|  | 食物 | 苹果  | 洋葱 | 蘑菇  | 蛋糕  | 香蕉 |

表格填入信息顺序：1. 喝牛奶的住在中间房子里  
2. 小黄住在最左边的房子里  
3. 小黄的邻居家的房门是蓝色的  
4. 绿门房子在最右边，橙门房子在其左边  
5. 小明住在红门的房子里  
6. 住在黄门房子里的吃苹果  
7. 吃苹果的邻居有只小狗  
8. 小兰喝茶还有只小狗  
9. 吃洋葱的住在吃苹果的右边  
10. 吃蛋糕的喝果汁  
11. 小白吃香蕉

**答案：**小黄喝水，小红有只小金鱼

这个解题方法的最关键是做了一张数表。

这样的数表在我们的生活中非常多，列车时刻表，航班信息表，股票行情表，课表等等。

当我们把这些数表中所代表的具体事项去掉，只单独抽象出这些数字来，就得到了一些矩阵的数表，这些数表就称矩阵。

**线性方程组**

《孙子算经》中的“鸡兔同笼”问题，明代数学家程大位的《算法统宗》里的大小和尚分馒头问题，都是线性方程组的问题。

设有  $n$  个未知数  $m$  个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其中  $a_{ij}$  表示第  $i$  个方程中第  $j$  个未知量  $x_j$  的系数， $b_i$  是常数项。

非齐次线性方程组（常数项不全为零），齐次线性方程组（常数项全为零）。

对于线性方程组，需要讨论如下问题：

（1）方程组是否有解？（2）在方程组有解时，解是否惟一？（3）如果有多个解，如何求出它的所有解？

而这一系列的问题都是系数和常数项确定的。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由  $m$  行  $n$  列构成的矩形阵列，

如 5 行 4 列的矩形阵列

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

这些矩形阵列称为矩阵。

### 矩阵的定义

**定义 2.1** 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) 按一定次序排列成的一个  $m$  行  $n$  列的矩形表，称为一个  $m$  行  $n$  列的矩阵，简称  $m \times n$  矩阵，记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } a_{ij} \text{ 称为矩阵第 } i \text{ 行第 } j \text{ 列的元素。}$$

注意：矩阵用大写黑体字母  $A, B, C, \dots$  表示，为了表明行数和列数的情况下，可用  $A_{m \times n}$  表示，或  $(a_{ij})_{m \times n}$ ，常用写法  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，英文单词 matrix。

### （二）几种特殊的矩阵

1. 零矩阵 所有元素均为 0 的矩阵，称为零矩阵，记作  $O$ 。
2. 行矩阵与列矩阵

行数为 1 的矩阵:  $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$  称为行矩阵, 也称为  $m$  维列向量;

列数为 1 的矩阵  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$  称为列矩阵, 也称为列向量。

3. 方阵 当  $m = n$  时, 即矩阵的行数和列数相同时, 称矩阵为方阵

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

主对角线, 副对角线 (只有方阵才有)

方阵中的特殊矩阵: 上三角阵, 下三角阵, 对角阵, 数量阵, 单位阵

对角阵 想一下对角阵首先要有什么? 首先得有对角线, 所以必须是方阵。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

若主对角线上的元素都是 1, 就又得到特殊矩阵为:  $E$

若对角线上的元素都是相同的数  $k$ , 得到的特殊矩阵为

$$\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

这个矩阵称作数量矩阵。

### 矩阵相等的概念

如果两个矩阵行数相等、列数也相等时, 称这两个矩阵是同型矩阵。

**定义 2.2 (矩阵的相等)** 如果两个矩阵  $A, B$  有相同的行数和列数, 并且对应位置上的元素均相等, 则称矩阵  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A = B$ 。

线性方程组的系数矩阵, 增广矩阵, 未知数矩阵, 常数项矩阵

### 线性变换

从变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  到变量  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \cdots \cdots \text{对应于矩阵 } A = (a_{ij})_{m \times n} \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

从变量  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  到变量  $y_1, y_2, \cdots, y_n$  的恒等变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \cdots \cdots \text{对应单位矩阵} \\ y_n = x_n \end{cases}$$

### (三) 矩阵的加法和数与矩阵的乘法（线性运算）

**例 1** 有两种物资从 3 个产地运往 4 个销地，两次调运方案分别为矩阵  $A$  与  $B$ ，

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \text{则从各个产地运往各销地两次的物资调}$$

运量共为？

思考：两个矩阵可以做加法需要满足什么条件？如何加？

**定义 2.3** 两个  $m$  行  $n$  列的矩阵  $A = (a_{ij})$ ， $B = (b_{ij})$  对应位置元素相加得到的  $m$  行  $n$  列的矩阵，称为矩阵  $A$  与  $B$  的和，记做  $A + B$ 。

$$\text{例 2 设 3 个产地与 4 个销地之间的里程为矩阵 } A, A = \begin{pmatrix} 120 & 175 & 80 & 90 \\ 80 & 130 & 40 & 50 \\ 135 & 190 & 95 & 105 \end{pmatrix}$$

已知货物每吨公里为 1.5 元，则各产地与各销地之间每吨货物的运费可记为？

**定义 2.4** 以数  $k$  乘矩阵  $A$  的每一个元素所得到的矩阵，称为数  $k$  与矩阵  $A$  的积，记作  $kA$ 。如果  $A = (a_{ij})$ ， $B = (b_{ij})$ ，那么  $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$ 。

$$\text{例 3 已知 } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \text{且 } A + 2X = B,$$

求  $X$ 。

### (四) 矩阵的乘法

设两个商店销售三种电视机的数量由矩阵  $A$  表示

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 14 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

三种电视机的零售单价由矩阵  $B$  表示

$$B = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix} \quad C = AB = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 14 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ 83 \end{pmatrix}$$

矩阵  $A$  表示两车间生产三种产品的数量

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 10 \\ 12 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

矩阵  $B$  表示三种产品的单位产品消耗两种原料的数量

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4.5 \\ 1.5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 10 \\ 12 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4.5 \\ 1.5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 143.5 \\ 63 & 138 \end{pmatrix}$$

我们将上面例题中矩阵之间的这种关系定义为矩阵的乘法

**定义 2.5** 设矩阵  $A=(a_{ik})_{m \times l}$  的列数与矩阵  $B=(b_{kj})_{l \times n}$  的行数相同, 则由元素

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj} \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

构成的  $m$  行  $n$  列矩阵

$$C=(c_{ij})_{m \times n} = \left( \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj} \right)_{m \times n}$$

称为矩阵  $A$  与矩阵  $B$  的积, 记为  $C=A \cdot B$  或  $AB$ .

**矩阵乘法的规则:**

(1) 两矩阵相乘时, 前矩阵 (居左) 每一行 (如第  $i$  行) 的各元素与后矩阵 (居右) 每一列 (如第  $j$  列) 中顺次对应的各元素相乘再相加, 从而得到乘积矩阵 (第  $i$  行第  $j$  列) 的元素。

(2) 为保证规则 (1), 前矩阵的列数应与后矩阵的行数相等, 否则两矩阵不能相乘。

(3) 乘积矩阵的行数与前矩阵相同, 乘积矩阵的列数与后矩阵相同。

**例 4** 计算下列矩阵的乘积, 并观察结果, 探讨性质

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{求 } AB \text{ 和 } BA.$$

矩阵与矩阵相乘不满足交换律,  $AB$  有意义, 但  $BA$  不一定有意义。

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, B = (5 \ 6 \ 4), \text{求 } AB \text{ 和 } BA.$$

$AB$  和  $BA$  都有意义, 但不同型。

$$(3) A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}, \text{求 } AB \text{ 和 } BA.$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{求 } AB \text{ 和 } BA.$$

如果同阶方阵  $A$  和  $B$  满足  $AB=BA$ , 则称  $A$  和  $B$  可交换。

$$(5) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{求 } AC \text{ 和 } BC.$$

$$AC = BC, \text{ 但 } A \neq B$$

结论, 矩阵乘法不满足消去律。

矩阵乘法与数的乘法的不同: 1. 矩阵乘法不满足交换律; 2. 不满足消去律; 3. 有非零的零因子

### 矩阵乘法的性质

$$(1)(AB)C = A(BC) \quad (\text{结合律}) \quad (2)(A+B)C = AC + BC \quad (3)C(A+B) = CA + CB$$

$$(4)k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad (5)EA = AE = A$$

### (五)方阵的正整数幂

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_k \quad A^0 = E \quad A^{k+l} = A^k A^l \quad (AB)^k \neq A^k B^k$$

### (六)矩阵的转置



## 运算规律

$$(A^T)^T = A \quad (A+B)^T = A^T + B^T \quad (kA)^T = kA^T$$

问题:  $(AB)^T = ?$

对称阵与反对称阵

对称阵:  $A^T = A \quad (a_{ij} = a_{ji})$

反对称阵:  $A^T = -A \quad (a_{ij} = -a_{ji})$

证明:  $A^T A, A + A^T$  是对称阵,  $A - A^T$  是反对称阵

得到结论:  $A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$  任一方阵都可以分解成对称阵与反对称阵的和。

(工程上很有用)

练习: 课本

## (七) 方阵的行列式

$n$  阶矩阵  $A$  的所有元素, 按原来次序构成的  $n$  阶行列式, 称为矩阵  $A$  的行列式, 记作  $|A|$  或  $\det A$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

## 方阵的行列式的性质

设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 则

$$(1) \quad |A^T| = |A|$$

$$(2) \quad |kA| = k^n |A|$$

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

请思考 (3)  $|AB| = |A| \cdot |B|$  (4)  $|AB| = |BA|$

**例 1** 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 若已知  $|A| = m$ , 求  $|-mA|$

**例 2** 设  $A$  为 3 阶矩阵, 且  $|A| = -2$ , 求  $||A| A^2 A^T| =$

例 3  $|A| = -2$  ,  $|B| = 3$  ,求  $|5AB|$  ,  $|-AB^T|$  ,  $|(AB)^{-1}|$

(八)课堂小结

请学生回答这节课学到了什么内容?

## 第二章 矩阵及其运算

### 第 3 节 逆矩阵

|         |                                                                                                                                                                                    |            |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 教学主要内容  | 逆矩阵的定义，逆矩阵的求法，逆矩阵的应用。                                                                                                                                                              |            |
| 教学目标    | <p>【知识目标】：①逆矩阵的定义；②会求矩阵的逆矩阵。</p> <p>【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。</p> <p>【情感目标】：通过探索、归纳、总结的过程，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，探索事物本质属性的欲望。</p> |            |
| 教材分析    | 重点                                                                                                                                                                                 | 逆矩阵的求法。    |
|         | 难点                                                                                                                                                                                 | 逆矩阵的求法及应用。 |
| 教学方法与手段 | 探究式教学法+粉笔黑板。                                                                                                                                                                       |            |
| 学习方法    | 学生可利用教师精心准备的例题，通过教师的引导，不断观察、分析、探索、归纳总结解决问题的方法。                                                                                                                                     |            |
| 教学学时数   | 2 学时，90 分钟。                                                                                                                                                                        |            |

|                  |                                                                                                      |                                                        |                                                        |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 教<br>学<br>过<br>程 |                                                                                                      | 数（一阶方阵）                                                | n 阶方阵                                                  |
|                  | 事实                                                                                                   | $1a = a1 = a$ ，任意的 $a$                                 | $EA = AE = A$ ，任意的 $A$                                 |
|                  |                                                                                                      | $a \neq 0 \Leftrightarrow$ 存在 $b$ ，使得<br>$ab = ba = 1$ | $A$ 满足？ $\Leftrightarrow$ 存在 $B$ 使得<br>$AB = BA = E$   |
|                  | 应用                                                                                                   | $ba = 1$ ，<br>$ax = c \Rightarrow x = 1x = bax = bc$   | $BA = E$ ， $AX = C \Rightarrow$<br>$X = EX = BAX$      |
|                  |                                                                                                      | $ab = 1$ ，<br>$xa = c \Rightarrow x = x1 = xab = cb$   | $AB = E$ ， $XA = C \Rightarrow$<br>$X = XE = XAB = CB$ |
|                  | (一)逆矩阵的概念和性质                                                                                         |                                                        |                                                        |
|                  | 定义 1 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵，如果存在 $n$ 阶方阵 $B$ ，使得 $AB = BA = E$ 则称 $A$ 为可逆矩阵，而 $B$ 称为 $A$ 的逆矩阵，记为 $A^{-1}$ 。 |                                                        |                                                        |

逆矩阵的性质

(1) 若矩阵  $A$  可逆，则  $A^{-1}$  也可逆，且  $(A^{-1})^{-1} = A$ 。

(2) 若矩阵  $A$  可逆，数  $k \neq 0$ ，则  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ 。

(3) 两个同阶可逆矩阵  $A$ ， $B$  的乘积是可逆矩阵，且  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。

(4) 若矩阵  $A$  可逆，则  $A$  的转置矩阵  $A^T$  也可逆，且  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 。

(5) 若矩阵  $A$  可逆，则  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 。

推论：设  $A$  是  $n$  阶方阵，如果存在  $n$  阶方阵  $B$  满足  $AB = E$ （或者  $BA = E$ ），则  $n$  阶方阵  $A$  可逆，且  $A^{-1} = B$ 。

例 1 设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 = 2E$ ，证明矩阵  $A + E$  可逆，并求  $(A + E)^{-1}$ 。

方阵可逆的条件及逆矩阵的求法

思考：(1) 什么条件下  $A$  才可逆？

(2) 如果可逆，如何求  $A^{-1}$ ？

若  $A$  可逆， $AB = E$ ，两边取行列式

$|AB| = |A| \cdot |B| = |E| = 1, \Rightarrow |A| \neq 0.$

**定义 2** 若  $n$  阶矩阵  $A$  的行列式  $|A| \neq 0$ ，则称  $A$  为非奇异矩阵(或非退化的)，否则称  $A$  为奇异矩阵(或退化的)。

$|A| \neq 0$  是  $A$  可逆的必要条件。

以上的第一个问题解决了，那么当一个矩阵可逆时，它的逆矩阵如何求解，这又是摆在我们面前的新问题了，翻了一座大山又是一座，解决了一个又是一个。

下面重点考虑如何求一个可逆矩阵的逆矩阵

以下面的例题为例进行分析

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

请同学们回忆余子式，代数余子式的定义，并写出矩阵  $A$  的所有代数余子式

**定义 3** 设  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ， $A_{ij}$  为  $A$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式，称矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ 为 } A \text{ 的伴随矩阵.}$$

**强调伴随矩阵代数余子式的书写特点。**

请写出矩阵  $A$  的伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

请计算  $AA^*$  和  $A^*A$

请同学们回答发现了什么？  $AA^* = A^*A = |A|E$

**该性质对任意矩阵都成立吗？**

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = A^*A = |A|E$$

**性质**  $AA^* = A^*A = |A|E$

以上性质告诉了我们什么？

告诉了我们当矩阵可逆时，它的逆是什么的问题。

到现在我们试着把已得到的结论梳理在一起。

1. 矩阵  $A$  的行列式  $|A| \neq 0$ ，则称  $A$  为非奇异；

$$2. A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*;$$

请同学们在思考， $A$  为非奇异，即  $A$  可逆时， $|A|$  是什么？

$A$  可逆时，利用定义知， $AA^{-1} = E$ ，则  $|A||A^{-1}| = |E|$ ，即  $|A||A^{-1}| = 1$ ，得  $|A| \neq 0$ 。

3.  $A$  可逆时， $|A| \neq 0$ 。

将这节课得到的以上 3 个重要结论总结成一个定理，就是

**定理 1** 矩阵  $A$  是可逆的充分必要条件是  $A$  非奇异，当  $A$  可逆时，有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

以上定理给出了我们本节最需要解决的问题的答案。

**逆矩阵的求法归纳：**

1. 利用  $|A|$  的值为零或不为零，判断  $A$  不可逆还是可逆；

2. 当  $A$  可逆时，求出  $A$  的伴随矩阵；

3. 根据公式  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$  写出  $A$  的逆矩阵。

**例 2** 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$  是否可逆，若可逆，求其逆矩阵。

**(二) 逆矩阵的应用**

**例 3** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ，求矩阵  $X$  使满足  $AXB = C$ 。

**(三) 课堂小结**

熟练掌握逆矩阵的求法。

## 第二章 矩阵及其运算

### 逆矩阵的相关证明、计算，克莱默法则，分块矩阵

|         |                                                                                                                                                                                         |             |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 教学主要内容  | 1. 逆矩阵的证明问题<br>2. 逆矩阵的计算问题<br>3. 分块矩阵                                                                                                                                                   |             |
| 教学目标    | <p>【知识目标】：①掌握逆矩阵的证明和计算问题；②了解分块矩阵。</p> <p>【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。</p> <p>【情感目标】：通过探索、归纳、总结的过程，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，探索事物本质属性的欲望。</p> |             |
| 教材分析    | 重点                                                                                                                                                                                      | 逆矩阵的证明和计算问题 |
|         | 难点                                                                                                                                                                                      | 逆矩阵的证明问题    |
| 教学方法与手段 | 探究式教学法+黑板粉笔                                                                                                                                                                             |             |
| 学习方法    | 学生可利用教师精心准备的例题，通过教师的引导，不断观察、分析、探索、归纳总结。                                                                                                                                                 |             |
| 教 学 学时数 | 2 学时，90 分钟。                                                                                                                                                                             |             |

## (一)复习引入

1. 想一想： 复习逆矩阵的定义，可逆的充要条件，逆矩阵的求法

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求矩阵 } X, \text{ 使其满足 } AXB = C.$$

$$(3) \text{ 设 } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, AP = PA, \text{ 求 } A^n.$$

### 矩阵多项式及其运算

设  $\varphi(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$  为  $x$  的  $m$  次多项式， $A$  为  $n$  阶矩阵，记

$$\phi(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m$$

$\phi(A)$  称为矩阵  $A$  的  $m$  次多项式. 43 页 15 题。

## (二)分块矩阵

### 分块矩阵的概念

将大矩阵  $A$  用若干条纵线和横线分成多个小矩阵，每个小矩阵称为  $A$  的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

$$\text{以矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 为例说明，矩阵都有哪些分块的方法。}$$

### 分块矩阵的运算

$$\text{以矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 分析分块矩阵的加法，数乘，乘法运}$$

算，分块矩阵的转置

(1) 加法运算：设矩阵  $A$  和  $B$  的行数相同、列数相同，并采用相同的分块法，则  $A + B$  的每个分块是  $A$  和  $B$  中对应分块之和；



(2) 数乘运算：设  $A$  是一个分块矩阵， $k$  为一实数，则  $kA$  的每个子块是  $k$  与  $A$  中相应子块的数乘；

(3) 乘法运算：两分块矩阵  $A$  和  $B$  的乘积依然按照普通矩阵的乘积进行运算，即把矩阵  $A$  和  $B$  中的子块当作数量一样来对待，但对于乘积  $AB$ ， $A$  的列的划分必须与  $B$  的行的划分一致；

(4) 分块矩阵的转置

设矩阵  $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ， $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  如何分块，最简洁，最好？

(5) 分块对角矩阵

设  $A$  为  $n$  阶矩阵，若  $A$  的分块矩阵只有对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且

在对角线上的子块都是方阵，即  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$ ，其中  $A_i$  都是方阵。

分块对角矩阵的性质

1. 若  $|A_i| \neq 0$ ，则  $|A| \neq 0$ ，且  $|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|$

2.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$

### (三)课堂小结

熟悉逆矩阵的证明和计算相关的问题；了解分块处理矩阵的思想和分块运算的原则

### (四)思考题：

计算行列式时，可以利用行列式的性质将行列式化为上三角形式，从而简化计算，那么，把行列式的某些性质应用到矩阵上，会给矩阵的运算带来什么方便那