



§2 方阵的特征值与特征向量

一、方阵的特征值与特征向量的引例

2

高铁



一、方阵的特征值与特征向量的引例

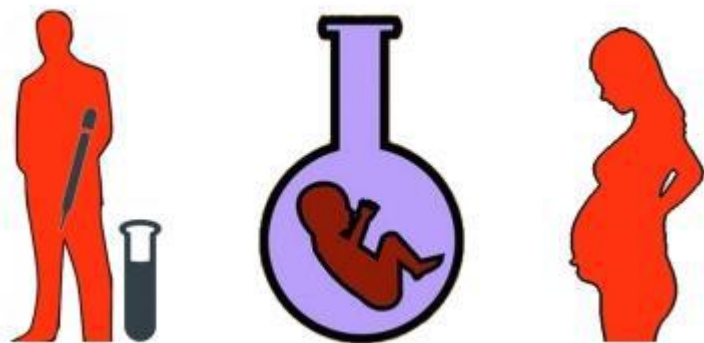
航天飞机定位问题



一、方阵的特征值与特征向量的引例

4

常染色体遗传问题



一、方阵的特征值与特征向量的引例

5

多项式求根问题

求多项式函数 $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$ 的零点

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

$$z^3 = 2z^2 - 4z + 8$$

$$z^2 = z^2$$

$$z = z$$

$$Ax = zx$$

一、方阵的特征值与特征向量的引例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\alpha = 4\alpha$$

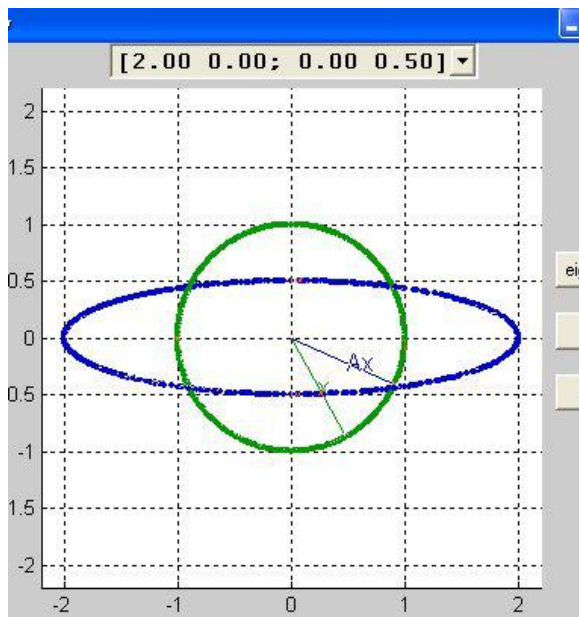
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

一、方阵的特征值与特征向量的引例

7

什么是特征值与特征向量？



特征向量就是在一个变换过程中不变的向量.

特征值就是特征向量经过变换后长度伸缩的系数.

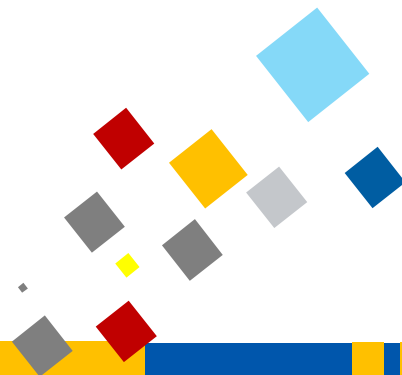
二、方阵的特征值与特征向量的概念

定义

设 A 是 n 阶方阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 α 使关系式

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

成立，那么数 λ 称为矩阵 A 的特征值，非零向量 α 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

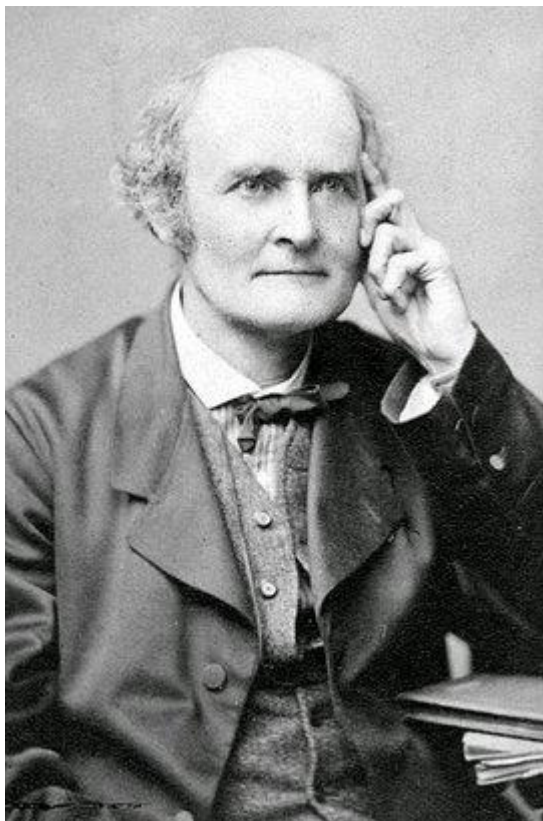


$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

二、方阵的特征值与特征向量的概念

10

科普小知识



凯莱(Arthur Cayley 1821~1895):
英国纯粹数学的近代学派带头人.
矩阵理论的创立者, 1858年发表了
《矩阵论的研究报告》, 系统的阐
述了关于矩阵的理论。

他对线性代数的理论、矢量和张量
分析、高次曲线的性质等都有研究, 写有数学
论文约900篇.

二、方阵的特征值与特征向量的概念

11

思考题

若 P_1, P_2 皆是 A 的对应于 λ 的特征向量，则下面哪一个向量一定是 A 的对应于 λ 的特征向量？

$$kP_1 \quad \times \quad (k \neq 0)$$

$$P_1 + P_2 \quad \times \quad (P_1 + P_2 \neq 0)$$

三、方阵的特征值与特征向量的求法

12

由特征值的定义知 $A\alpha = \lambda\alpha \quad \alpha \neq 0$

$$(A - \lambda E)\alpha = 0$$

有非
零解

特征向量需要满足的条件

故 $|A - \lambda E| = 0$

特征值需要满足的条件

定义

称多项式 $|A - \lambda E|$ 为方阵 A 的特征多项式

方程 $|A - \lambda E| = 0$ 为 A 的特征方程

定理

n 阶方阵 A 一定有 n 个特征值.

三、方阵的特征值与特征向量的求法

⇔ $AX = \lambda X = \lambda E X$

⇔ 非零向量 x 满足 $(A - \lambda E)x = 0$ (零向量)

⇔ 齐次线性方程组有非零解

⇔ 系数行列式 $|A - \lambda E| = 0$

三、方阵的特征值与特征向量的求法

14

总结

1

$$|A - \lambda E| = 0$$

求行列式

特征值

2

$$(A - \lambda_i E) \alpha = 0$$

解齐次线性方程组的基础解系

特征向量

三、方阵的特征值与特征向量的求法

15

例 1

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

三、方阵的特征值与特征向量的求法

16

解 矩阵 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) \end{aligned}$$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

三、方阵的特征值与特征向量的求法

17

当 $\lambda_1 = 1$ 时 解方程 $(A - E)x = 0$

$$\text{由 } A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是 $k\alpha_1$ ($k \neq 0$) 是对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

三、方阵的特征值与特征向量的求法

当 $\lambda_1 = 2$ 时 解方程 $(A - 2E)x = 0$

$$\text{由 } A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是 $k\alpha_2$ ($k \neq 0$) 是对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的全部特征向量

三、方阵的特征值与特征向量的求法

当 $\lambda_3 = 3$ 时 解方程 $(A - 3E)x = 0$

$$\text{由 } A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是 $k\alpha_3$ ($k \neq 0$) 是对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量

三、方阵的特征值与特征向量的求法

20

例 2

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

四、方阵的特征值与特征向量的性质

21

性质1 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 则

$$(1) \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$$(2) \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$$

性质2 若 λ 是矩阵 A 的特征值, α 为对应于特征值 λ 的特征向量, 则

(1) λ^2 是 A^2 的特征值

(2) 当 A 可逆时, $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值

四、方阵的特征值与特征向量的性质

22

例3

三阶矩阵 A 的特征值为 $-2, 1, 3$ ，则下列矩阵中非奇异矩阵是

$$A. 2E - A$$

$$B. 2E + A$$

$$C. E - A$$

$$D. A - 3E$$

四、方阵的特征值与特征向量的性质

例4

设2是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵

$\left(\frac{1}{3} A^2 \right)^{-1}$ 的一个特征值是？

四、方阵的特征值与特征向量的性质

24

例5 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 已知 A 有特征值 1, 2

求 x 的值和另一特征值.

$$x = 4 \qquad \lambda = 3$$

四、方阵的特征值与特征向量的性质

例6 设 3阶矩阵A的特征值为1, -1, 2, 求

$$|A^* + 3A - 2E|$$

内容总结：

来源

定义

计算

震动分析，
飞机定位，
常染色体
遗传，多
项式求根

特征值，
特征向量

特征值及对
应的特征向
量的求法