



矩阵的逆

文山学院 数学与工程学院

黄卫华（副教授）





主要内容

- 一、问题的提出
- 二、逆矩阵的定义
- 三、矩阵可逆的条件
(求逆公式)



一、问题的提出

1. 数的运算规则有哪些？

2. 矩阵的运算规则有哪些？



二、逆矩阵的定义

1. 可逆的定义

定义 7 n 级方阵 A 称为**可逆的**，如果有 n 级方阵 B ，

使得

$$AB = BA = E, \quad (1)$$

这里 E 是 n 级单位矩阵.

矩阵 B 称为矩阵 A 的**逆矩阵**，记为 A^{-1} 。



2. 逆矩阵的唯一性

若方阵 A 可逆，则其逆矩阵唯一。

证明 设 B 和 C 都是 A 的逆矩阵，则由定义有

$$AB = BA = E, AC = CA = E,$$

于是

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

所以逆矩阵唯一。

证毕



三、矩阵可逆的条件

现在的问题是：

(1) 在什么条件下矩阵 A 是可逆的？

(2) 如果 A 可逆，怎样求 A^{-1} ？



1. 伴随矩阵

定义 9 设 A_{ij} 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

中元素 a_{ij} 的代数余子式，矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵.



问： A 的伴随矩阵 A^* 与矩阵 A 的积 $A^*A=?$

矩阵 A 与 A 的伴随矩阵 A^* 的积 $AA^*=?$

由行列式按一行(列)展开的公式立即得出：

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix} = dE \quad (2)$$

其中 $d = |A|$.



如果 $d = |A| \neq 0$, 那么由 (2) 得

$$A \left(\frac{1}{d} A^* \right) = \left(\frac{1}{d} A^* \right) A = E. \quad (3)$$

2. 矩阵可逆的充分必要条件

定理 3 矩阵 A 可逆的充要条件是 A 非退化, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^* \quad (d = |A| \neq 0).$$

证明 当 $d = |A| \neq 0$, 由 (3) 可知, A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^*. \quad (4)$$



反过来，如果 A 可逆，那么有 A^{-1} 使

$$AA^{-1} = E.$$

两边取行列式，得

$$|AA^{-1}| = |A| |A^{-1}| = |E| = 1,$$

因而 $|A| \neq 0$ ，即 A 非退化。

证毕

定理 3 不但给出了一矩阵可逆的条件，同时也给出了求逆矩阵的公式 (4)，用公式 (4) 求逆矩阵的方法叫**伴随矩阵法**。



例 1 用伴随矩阵法求下列矩阵的逆阵

$$(1) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$



小结与思考

1. 请叙述判断可逆矩阵的充要条件
2. 如何求可逆矩阵的逆矩阵？
3. 形如 $AX=B$ ，其中 A ， B 都是 n 级方阵，若 A 是非退化的，怎么解该方程？