

第 2 章 随机变量及其分布

(A)

一、填空题

1. 设 X 为一个随机变量, x 为任意的实数, 则 X 的分布函数定义为 $F(x) =$ _____ ; 根据分布函数的性质 $P\{x_1 < X \leq x_2\} =$ _____ .
2. 如果随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布 $B(n, p)$, 那么它的分布律为 $P\{X = k\} =$ _____ .
3. 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 则其分布律为 _____ .
4. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \lambda p^k$ ($k = 1, 2, \dots$), 其中 λ 是已知常数, 则未知参数 $p =$ _____ .
5. X 服从 (a, b) 上的均匀分布, 那么 X 的概率密度为 _____ .
6. X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 那么 X 的概率密度为 _____ .
7. $X \sim N(0, 1)$, 那么 X 的概率密度为 _____ .
8. 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数, 那么 $P\{a < X < b\} = F(b) - F(a) =$ _____ .
9. 设随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.4, & -1 \leq x < 1 \\ 0.8, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

则 X 的分布律为 _____ .

10. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的 3 次独立重复观察中 “ $X \leq \frac{1}{2}$ ” 出现的次数, 则 $P\{Y = 2\} =$ _____ .
11. 设随机变量 $X \sim N(1, 2^2)$, 则 $P\{X < 2.2\} =$ _____ , $P\{-1.6 < X < 5.8\} =$ _____ , $P\{|X| \leq 3.5\} =$ _____ .
12. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Y = 3X + 1$ 的分布函数 $G(y) =$ _____ .
13. 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X , 再从 1, 2, ..., X 中任取一个数, 记为 Y , 则 $P\{Y = 2\} =$ _____ .

二、单项选择题

1. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 是偶函数, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对于任意实数 a , 有 ().

(A) $F(-a) = 2F(a) - 1$

(B) $F(-a) = 0.5 - \int_0^a f(x)dx$

(C) $F(-a) = F(a)$

(D) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)dx$

2. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是随机变量的分布函数, 则为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 成为随机变量的分布函数, 系数 a 和 b 必须满足 ().

(A) $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{3}$

(B) $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$

(D) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$

3. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是随机变量的分布函数, $f_1(x), f_2(x)$ 是相应的概率密度, 则 ().

(A) $f_1(x)f_2(x)$ 是概率密度

(B) $f_1(x) + f_2(x)$ 是概率密度

(C) $F_1(x)F_2(x)$ 是分布函数

(D) $F_1(x) + F_2(x)$ 是分布函数

4. 设随机变量 X 服从指数分布, $Y = \min\{X, 2\}$, 则随机变量 Y 的分布函数 ().

(A) 是连续函数

(B) 至少有两个间断点

(C) 是阶梯函数

(D) 恰好有一个间断点

5. 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$. 则此人

第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ().

(A) $3p(1-p)^2$

(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$

(D) $6p^2(1-p)^2$

三、解答题

1. 一颗骰子抛两次, 以 X 表示两次中所得的最小点数

(1) 试求 X 的分布律;

(2) 写出 X 的分布函数.

2. 某种抽奖活动规则是这样的: 袋中放红色球及白色球各 5 只, 抽奖者交纳一元钱后得到一次抽奖的机会, 然后从袋中一次取出 5 只球, 若 5 只球同色, 则获奖 100 元, 否则无奖, 以 X 表示某抽奖者在一次抽取中净赢钱数, 求 X 的分布律.

3. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = a \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0$ 为常数, 试求常数 a .

4. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_i	1/4	1/2	1/4

(1) 求 X 的分布函数;

(2) 求 $P\{X \leq \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\}$, $P\{2 \leq X \leq 3\}$.

5. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$ 求:

(1) $P\{X = \text{偶数}\}$

(2) $P\{X \geq 5\}$

(3) $P\{X = 3 \text{ 的倍数}\}$

6. 某公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为 $0.5t$ 的泊松分布, 而与时间间隔的起点无关(时间以小时计)

(1) 求某一天中午 12 时至下午 3 时没有收到紧急呼救的概率.

(2) 求某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到一次紧急呼救的概率.

7. 某人进行射击, 每次射击的命中率为 0.02, 独立射击 400 次, 试求至少击中 2 次的概率.

8. 设事件 A 在每一次试验中发生的概率为 0.3, 当 A 发生不少于 3 次时, 指示灯发出信号. 现进行 5 次独立试验, 试求指示灯发出信号的概率.

9. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X (以分钟计)服从参数为 5 指数分布. 某顾客在窗口等待服务, 若超过 10 分钟, 他就离开. 他一个月要到银行 5 次, 以 Y 表示他未等到服务而离开窗口的次数. 写出 Y 的分布律, 并求 $P\{Y \geq 1\}$.

10. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} a \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 试求:

(1) 系数 a ;

(2) X 落在区间 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内的概率.

11. 设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

试求:

(1) 系数 A ; (2) X 落在区间 $(0.3, 0.7)$ 内的概率; (3) X 的概率密度.

12. 设随机变量 X 服从 $(0, 5)$ 上的均匀分布, 求 x 的方程 $4x^2 + 4Xx + X + 2 = 0$ 有实根的概率.

13. 设 $X \sim N(3, 4)$

(1) 求 $P\{2 < X \leq 5\}, P\{-4 < X \leq 10\}, P\{|X| > 2\}, P\{X > 3\}$;

(2) 确定 c 使得 $P\{X > c\} = P\{X \leq c\}$;

(3) 设 d 满足 $P\{X > d\} \geq 0.9$, 问 d 至多为多少?

14. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 若 $P\{|X| > k\} = 0.1$, 试求 $P\{X < k\}$.

15. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 试问: 随着 σ 的增大, 概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ 是如何变化的?

16. 已知离散随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
p_i	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

试求 $Y = X^2$ 与 $Z = |X|$ 的分布律.

17. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求 $Y = e^X$ 的概率密度.

18. 设 $X \sim U(0, 1)$, 试求 $1 - X$ 的概率密度 .
 19. 设 $X \sim U(1, 2)$, 试求 $Y = e^{2X}$ 的概率密度 .
 20. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

试求下列随机变量的概率密度 :

- (1) $Y_1 = 3X$;
 (2) $Y_2 = 3 - X$;
 (3) $Y_3 = X^2$.

四、应用题

1. 甲地需要与乙地的 10 个电话用户联系, 每一个用户在 1 分钟内平均占线 12 秒, 并且各个用户是否使用电话是相互独立的. 为了在任意时刻使得电话用户在用电话时能够接通的概率不小于 0.99, 应至少有多少电话线路?

2. 在一个电子仪器系统中, 有 10 块组件独立工作, 每个组件经过 5 小时后仍能正常工作的概率为 $e^{-5\lambda}$, 其中 λ 是与工艺、系统复杂性有关的因子. 若该系统中损坏的组件不超过一块, 则系统仍能正常工作, 那么, 5 小时后系统不能正常工作的概率 ($\lambda = 0.08$) 是多少?

3. 测量距离时, 产生的随机误差 X 服从正态分布 $N(20, 40^2)$, 做三次独立测量, 求:

- (1) 至少有一次误差绝对值不超过 30m 的概率;
 (2) 只有一次误差绝对值不超过 30m 的概率.

4. 假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从参数为 5 的指数分布, 设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数.

5. 有甲乙两种颜色和味道都极为相似的名酒各 4 杯, 如果从中挑 4 杯, 能将甲种酒全挑出来, 算是试验成功一次.

(1) 某人随机去挑, 问他试验成功的概率是多少?

(2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒, 他连续试验 10 次, 成功 3 次, 试推断他是猜对的还是确有区分的能力 (设各次试验是相互独立的).

(B)

1. 设随机变量的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{9}, & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X \geq k\} = 2/3$ ，求 k 的取值范围。

2. 设随机变量 X 服从 $(-1, 2)$ 上的均匀分布，记 $Y = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$ ，试求 Y 的分布律。

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ，求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度

$f_Y(y)$ 。

4. 设 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f_X(x)$ 是偶函数，令 $Y = -X$ ，证明 Y 与 X 有相同的概率密度。

5. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x \in [1, 8] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数。求随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数。

6. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

试求下列随机变量的概率密度：

(1) $Y_1 = 2X + 1$;

(2) $Y_2 = e^X$;

(3) $Y_3 = X^2$ 。

7. 设随机变量 X 服从参数为 $1/2$ 的指数分布，试证 $Y_1 = e^{-2X}$ 和 $Y_2 = 1 - e^{-2X}$ 都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布。