

《概率论与数理统计》模拟试卷 8 参考答案

一、判断题.

1. 互斥事件一定是对立事件. (×)
2. 无记忆性是指数分布的特征. (√)
3. 若随机变量 X, Y 相互独立的, 则相关系数 $\rho_{XY} = 0$. (√)
4. 统计量是含有未知参数的样本函数. (×)
5. 双边检验显著时, 单边检验也一定显著. (√)

二、选择题.

1. 设 A, B, C 为随机事件, 则 “ A, B, C 都不发生” 的逆事件是 (B).
A. A, B, C 至少有一个发生 B. A, B, C 都发生
C. A, B, C 至少有两个发生 D. A, B, C 不都发生
2. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 当 σ 增大时, 概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ (C).
A. 单调增大; B. 单调减小; C. 保持不变; D. 不能确定
3. 设 X 在 $[2, 4]$ 上服从均匀分布, 则 $E(2X + 1) =$ (D).
A. 1 B. 3 C. 5 D. 7
4. 设 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $\text{Var}(X) = \sigma^2$, 根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - \mu| \geq 6\sigma\} \leq$ (C).
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{6}\sigma^2$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{1}{36}\sigma^2$
5. 在假设检验中, 显著性水平 α 是 (A).
A. $P(\text{拒绝} H_0 | H_0 \text{为真})$ B. $P(\text{接受} H_0 | H_0 \text{为真})$
C. $P(\text{接受} H_0 | H_0 \text{为假})$ D. $P(\text{拒绝} H_0 | H_0 \text{为假})$

三、填空题.

1. 设 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3$, 则 $P(A \cup B) =$ 0.52.
2. 设 $X \sim B(n, P)$, 且 $E(X) = 2.4, \text{Var}(X) = 1.44$, 则 $n =$ 6 和 $P =$ 0.4.

3. 设 X 为随机变量, 若 $E(X)=2$, $\text{Var}\left(\frac{X}{2}\right)=1$, 则 $E[(X-2)^2]=$ 4.

4. 设总体 $X \sim U(a, b)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 X 的样本, 则 a, b 的最大似然估计量分为

$$\hat{a} = \underline{x_{(1)}} \text{ 和 } \hat{b} = \underline{x_{(n)}}.$$

5. 检验假设的方法是依据 小概率事件 原理.

四、证明题.

1. 设常数 $\theta \in (-\infty, +\infty)$, X 有概率密度 $f(x) = \begin{cases} e^{\theta-x}, & (x \geq \theta) \\ 0 & (x < \theta) \end{cases}$,

证明: $\hat{\theta}_1 = \bar{x} - 1$ 是 θ 的无偏估计

证: 因为 $E(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) - 1$,

$$\text{而 } E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot e^{\theta-x} dx = \theta + 1$$

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) - 1 = \frac{1}{n} [n(\theta + 1)] - 1 = \theta$$

所以, $\hat{\theta}_1 = \bar{x} - 1$ 是 θ 的无偏估计.

2. 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布, 其分布密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (x \geq 0,) \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \text{ 其中未知参数 } \lambda > 0.$$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本, 其观测值为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

且 $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$

证明: λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

证: 似然函数:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda (\sum_{i=1}^n x_i)}$$

似然函数取对数, $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda (\sum_{i=1}^n x_i)$

对数似然函数求导并令导数为零，可得：

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n \ln \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right] = \frac{n}{\lambda} - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = 0,$$
$$\therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)} = \frac{1}{\bar{x}}$$

五、计算题.

1. 设 (X, Y) 有联合分布密度为： $f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(4x+3y)}, & (x > 0, y > 0) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$,

求 (1) 常数 A ；(2) 边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ ；(3) X 与 Y 是否相互独立？

解： (1) $1 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} Ae^{-(4x+3y)} dx dy = \frac{A}{12}$, $\therefore A = 12$

$$(2) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 所以 X, Y 相互独立.

2. 由经验知某零件质量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu = 15$, $\sigma^2 = 0.05$, 技术革新后, 随机抽出 6 个零件, 测得质量经过计算得: 样本均值 $\bar{X} = 14.9$ (g), 已知方差不变, 问平均质量是否为 15 g? ($\alpha = 0.05$)

$$(Z_{0.005} = 2.58; \quad Z_{0.025} = 1.96; \quad Z_{0.05} = 1.65)$$

解: (1) 待检假设为: $H_0: \mu = \mu_0 (\mu_0 = 15) \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 (\mu_0 \neq 15)$

(2) 已知: $n = 6$, $\bar{x} = 14.9$, $\sigma_0^2 = 0.05$,

$$\therefore |Z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \right| = \left| \frac{14.9 - 15}{\sqrt{\frac{0.05}{6}}} \right| = \left| \frac{-0.1}{0.091287} \right| = 1.095$$

(3) $\alpha = 0.05$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$

(4) 由于 $|Z|=1.095 > Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ 不成立, 所以, 接受 H_0 , 即可以认为平均质量仍为 $15g$.

3. 设有一批某种袋装物品, 每袋净重 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, (单位: 克). 现从中随机抽取 8 袋测其净重, 并经计算得: 样本均值为 $\bar{x} = 12.15$, 样本方差 $s^2 = 0.0016$, 求 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间?

$$(\chi^2_{0.025}(7) = 16.613, \chi^2_{0.975}(7) = 1.69,$$

$$\chi^2_{0.95}(7) = 2.167, \chi^2_{0.05}(7) = 14.067)$$

解: $\bar{x} = 12.15, s^2 = 0.0016, n = 8,$

$$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05,$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(7) = 16.613; \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(7) = 1.69$$

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[\frac{7 \times 0.0016}{16.613}, \frac{7 \times 0.0016}{1.69} \right] = (0.000674, 0.006627)$$

4. 设随机变量 X 的概率密度为: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & (0 < x < 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 已知 $E(X) = 0.5$,

$Var(X) = 0.15$, 求系数 a 、 b 和 c ?

$$\text{解: 由 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c \quad (1)$$

$$0.5 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c \quad (2)$$

因为 $E(X) = 0.5$, $Var(X) = 0.15$, 而 $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$\text{所以, } E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = 0.4$$

$$0.4 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 联立方程组, 可得: $a = 12, b = -12, c = 3$