

《线性代数》模拟试卷（八）答案

一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

- (×) 1. 排列 32514 是偶排列.
- (×) 2. 设 A, B, C 为同阶方阵, 若 $AB = AC$, 则 $B = C$.
- (√) 3. 初等矩阵都是可逆矩阵.
- (√) 4. 包含零向量的任何向量都是线性无关的.
- (×) 5. 集合 $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in R \right\}$ 是一个向量空间.

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. 矩阵 $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ 可逆, 则 x 必满足 $x \neq 2$ 且 $x \neq -2$.
3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的标准形矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. 向量 $\alpha = (1, 2, 2, 3)^T, \beta = (3, 1, 5, 1)^T$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

三、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$, 则 $\begin{vmatrix} 2a_{12} & 2a_{11} & 2a_{13} \\ 2a_{22} & 2a_{21} & 2a_{23} \\ 2a_{32} & 2a_{31} & 2a_{33} \end{vmatrix} =$ (D)
- A. -4 B. 4 C. -16 D. 16
2. 如果 A, B 均为 n 阶矩阵, k 为常数, 那么以下命题错误的是 (B)

A. $(kA)^T = kA^T$ B. $(AB)^T = A^T B^T$ C. $(A+B)^T = A^T + B^T$ D. $(A^T)^T = A$

3. 下列方程组中是线性方程组的是 (C)

A. $\begin{cases} x_1 + x_2^2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x_1 x_2 + 3x_2 = 10 \\ x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$

4. 向量组 $\alpha_1 = (3, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (4, a, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, a)^T$ 线性无关, 则 a 应满足条件 (D).

A. $a = 0$ 或 2 B. $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ C. $a = 1$ 或 $a = 2$ D. $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$

5. 以下矩阵不是初等矩阵的是 (B)

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解, 则下列命题正确的是 (A)

A. 向量 b 能由系数矩阵的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示

B. $r(A) \neq r(A \ b)$ C. $r(A) = r(A \ b) < n$ D. A 的行向量线性相关

7. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 4, 0)^T$, 向量 $\beta = (0, 1, 2)^T$ 可表示为

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合: $\beta = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$, 则 a, b, c 应满足条件 (B)

A. $a = 3, b = 2, c = 1$ B. $a = 3, b = 2, c = -1$

C. $a = -3, b = 2, c = -1$ D. $a = 3, b = -2, c = 1$

8. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T$, $\alpha_4 = (1, -1, 2, 2)^T$,

$\alpha_5 = (2, 1, 5, 0)^T$ 下列是该向量组的极大线性无关组的是 (B).

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

四、计算题 (共 50 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 的值. (6 分)

解: 原式 = $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$ (2 分)

= $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix}$ (3 分)

= $\begin{vmatrix} 0 & -6 & -10 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix}$ (4 分)

= - $\begin{vmatrix} -6 & -10 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$ (5 分)

= -24 (6 分)

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$, 求 $A_{41} + A_{42}$ 的值. (7 分)

解: $A_{41} + A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (3 分)

= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (4 分)

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -9 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= 12 \quad (7 \text{ 分})$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AX = 2X + A$, 求矩阵. (8 分)

解: 所给方程可以变形为 $X = (A - 2E)^{-1}A$ (1 分)

$$((A - 2E)A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

则 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (8 分)

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩 $r(A)$. (5 分)

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (2 分)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ (3 分)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ (4 分)

则 $r(A) = 3$ (5 分)

5. 用基础解系表示如下线性方程组的全部解 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \end{cases}$. (14

分)

解: 构造增广矩阵 $(Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \end{pmatrix}$ (1 分)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (6 分)

由 $r(A) = r(Ab) = 2 < 5$, 知方程组有无穷多解, 且原方程组等价于方程组

$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + 2x_5 - \frac{9}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 + \frac{23}{2} \end{cases}$ (8 分)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别代入等价方程组对应的齐次方程组中求得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ 分})$$

求特解：令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ，得

$$x_1 = -9/2, x_2 = 23/2, \quad (12 \text{ 分})$$

故所求通解为

$$x = c_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意的常数。 (14 分)

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

解：矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1 \text{ 分})$$

化简得 $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$ ，所以 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 是矩阵 A 的特征值。 (3 分)

当 $\lambda_1 = 2$ 时，解齐次线性方程组 $(2I - A)x = 0$

$$2\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得它的基础解系是 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以矩阵 $\mathbf{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量是

$$c_1 \alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}) \quad (6 \text{ 分})$$

当 $\lambda_3 = -1$ 时，解齐次线性方程组 $(-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$-\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8 \text{ 分})$$

可得它的基础解系为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以矩阵 $\mathbf{A}$ 对应于 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量为

$$c_3 \alpha_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \text{ 为任意常数}) \quad (10 \text{ 分})$$