

案例：方差的下限估计

背景：方差刻画了随机变量相对它的均值的平均偏离程度的大小，描述了随机变量稳定与波动、集中与分散的状况。因此具有很重要的意义。很多时候我们希望得到方差的估计，但实际上在多数情况下是做不到的。而在实际中证明，给方差确定一个下界，是非常有用的，能帮助我们更多的认识随机变量的性质。

建模：设接收到带有高斯噪声的正弦信号
 $X(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \phi) + w(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$

其中 $A > 0$, f_0 都是已知的参数。我们希望估计正弦信号的相位的下界。

分析求解：噪声的一维概率密度函数为： $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\}$ ，则信号的 n 维概

率密度函数为： $p(x, \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A\cos(2\pi f_0 n + \phi))^2]$ 。

对对数似然函数求导可以得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x; \phi)}{\partial \phi} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] - A\cos(2\pi f_0 n + \phi)] A\sin(2\pi f_0 n + \phi) \\ &= -\frac{A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n]\sin(2\pi f_0 n + \phi) - \frac{A}{2}\sin(4\pi f_0 n + 2\phi)] \end{aligned}$$

以及

$$\frac{\partial^2 \ln p(x; \phi)}{\partial \phi^2} = -\frac{A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n]\cos(2\pi f_0 n + \phi) - A\cos(4\pi f_0 n + 2\phi)]$$

通过取负的期望值，我们有

$$\begin{aligned} -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x; \phi)}{\partial \phi^2}\right] &= \frac{A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n]\cos^2(2\pi f_0 n + \phi) - A\cos(4\pi f_0 n + 2\phi)] \\ &= \frac{A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 n + 2\phi) - \cos(4\pi f_0 n + 2\phi)\right] \\ &\approx \frac{NA^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

由 Cramer-Rao 下限定理，得

$$\text{var}(\hat{\phi}) \geq \frac{2\sigma^2}{NA^2}$$

结论： 由上面的结果可帮助我们认识相位的取值范围。一般来说，方差有助于人们更多的认识随机变量的性质。