

《概率论与数理统计》模拟试卷 6 参考答案

一、判断题.

1. 事件 A, B 独立, 则 $\bar{A}, \bar{B}$ 不独立. (×)
2. 无记忆性是泊松分布的特征. (×)
3. 多元随机向量的边缘分布不能决定联合分布. (√)
4. 样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计. (√)
5. 单边检验显著时, 双边检验也一定显著. (×)

二、选择题.

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $A \subset B$, 则下列等式不一定正确的是 (A).
A. $P(AB) = P(A)P(B)$ B. $P(B-A) = P(B) - P(A)$
C. $P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$ D. $P(A \cup B) = P(B)$
2. 设 $X \sim N(50, 10^2)$, 则随机变量 (B) $\sim N(0, 1)$.
A. $\frac{X-50}{100}$ B. $\frac{X-50}{10}$ C. $\frac{X-100}{50}$ D. $\frac{X-10}{50}$
3. 设 X 和 Y 相互独立, $\text{Var}(X) = 4, \text{Var}(Y) = 2$, 则 $\text{Var}(3X - 2Y) =$ (D).
A. 8 B. 28 C. 32 D. 44
4. 若 $X \sim N(1, 4), Y \sim N(1, 9)$ 且 $\rho_{XY} = 0.45$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ (D).
A. 2.4 B. 2.5 C. 2.6 D. 2.7
5. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, 若样本量 n 和置信度 $1-\alpha$ 均不变, 则对于不同的样本观测值, μ 的置信区间长度 (C).
A. 变长 B. 变短 C. 保持不变 D. 不能确定

三、填空题.

1. 现从含有 2 个次品的 10 个零件中, 任取两次, 每次随机取一个, 取后不放回, 则事件 $A = \text{“两个都是次品”}$ 的概率 $P(A) = \frac{1}{45}$ (或 0.0222).
2. 设 $X \sim N(3, 4)$, 则 $P(2 < X \leq 4) = 0.383$. ($\Phi(0.5) = 0.6915$)
3. 设 $X \sim B(n, p)$, 且 $E(X) = 3, \text{Var}(X) = 1.5$, 则 $n = 6$, $p = 0.5$.
4. 设随机变量 X 的方差 $\text{Var}(X) = 2$, 根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq 0.5$.
5. 检验假设的方法是依据 小概率事件原理.

四、证明题.

1. 设事件 A, B, C 的概率都是 $1/2$, 且 $P(ABC) = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

$$\text{证明: } 2P(ABC) = P(AB) + P(AC) + P(BC) - 1/2$$

$$\begin{aligned} \text{证: 由 } P(ABC) &= P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)] \\ &= P(AB) + P(BC) + P(AC) - P(ABC) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{所以, } 2P(ABC) = P(AB) + P(AC) + P(BC) - 1/2$$

2. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 其分布列为

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, (\lambda > 0, x = 0, 1, 2, \dots)$$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本, 其观测值为

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 且 $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

证明: λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda} = \bar{x}$.

解: 似然函数为:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n P(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{(x_i)!} e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n (x_i)!},$$

似然函数取对数,

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = -n\lambda + \ln \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - \ln \left[\prod_{i=1}^n (x_i)! \right]$$

对数似然函数求导并令导数为零, 可得:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\ln \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - n\lambda - \ln \left[\prod_{i=1}^n (x_i)! \right] \right] = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - n = 0$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \bar{x}.$$

五、计算题.

1. 设随机变量 X 的概率密度为: $f(x) = Ae^{-|x|}$, $(-\infty < x < +\infty)$,

试求: (1) 系数 A ; (2) $P(0 < X < 1)$; (3) X 的分布函数 $F(x)$.

$$\text{解: (1) } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2A \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$(2) \quad P(0 < X < 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0.316$$

$$(3) F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-|x|} dx$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{1}{2} e^x$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } F(x) = \frac{1}{2} (\int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^x e^{-x} dx) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$\text{因此, 分布函数 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & (x < 0) \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

2. 由经验知某砖厂生产的砖的抗断强度 X 服从正态分布, 其中 $\mu = 32.5$, $\sigma^2 = 1.21$, 技术革新后, 从某一批砖中随机抽出 6 块, 测得抗断强度经过计算得: 样本均值 $\bar{X} = 31.13$ ($\text{kg} \cdot \text{cm}^{-2}$), 已知方差不变, 问该批砖的平均抗断强度是否为 32.5? ($\alpha = 0.05$)

$$(Z_{0.005} = 2.58; \quad Z_{0.025} = 1.96; \quad Z_{0.025} = 1.65)$$

解: (1) 待检假设为: $H_0: \mu = \mu_0 (\mu_0 = 32.5) \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 (\mu_0 \neq 32.5)$

$$(2) \text{ 已知: } n = 6, \quad \bar{x} = 31.13, \quad \sigma_0^2 = 1.21,$$

$$\therefore |Z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \right| = \left| \frac{31.13 - 32.5}{\sqrt{\frac{1.21}{6}}} \right| = \left| \frac{-1.37}{0.449} \right| = 3.051$$

$$(3) \alpha = 0.05, \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

(4) 由于 $|Z| = 3.051 > Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ 成立, 所以, 拒绝 H_0 , 即该批砖

的平均抗断强度不能认为是 32.5.

3. 若熔化时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，从一批同类保险丝中随机抽取 9 根，测其熔化时间的样本均值为 $\bar{x} = 56.32$ ，样本方差 $s^2 = 0.0484$ ，求 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间？

$$(\chi^2_{0.025}(8) = 17.535, \chi^2_{0.05}(8) = 15.507 \\ , \chi^2_{0.95}(8) = 2.733, \chi^2_{0.975}(8) = 2.18)$$

解： $\bar{x} = 56.32$ ， $s^2 = 0.0484$ ， $n = 9$ ，

$$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(8) = 17.535;$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(8) = 2.18$$

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[\frac{8 \times 0.0484}{17.535}, \frac{8 \times 0.0484}{2.18} \right] = (0.02208, 0.1776)$$

4. 某房地产投资公司出售五个楼盘面积与售价资料如下：

楼盘面积 X (百平方米)	9	15	10	11	10
售价 y (千元)	36	80	44	55	35

试建立售价 Y 对楼盘面积 X 的直线回归方程？

解：（1）

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	9	36	81	1296	324
	15	80	225	6400	1200
	10	44	100	1936	440
	11	55	121	3025	605
	10	35	100	1225	350
Σ	55	250	627	13882	2919
$\frac{1}{n}\Sigma$	11	50			

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 55 \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 250 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 627 \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 13882 \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 2919$$

回归方程：

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{5 \times 2919 - 55 \times 250}{5 \times 627 - (55)^2} = 7.68$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 50 - 7.68 \times 11 = -34.48$$

所以，回归方程为 $\hat{y} = -34.48 + 7.68x$