

《概率论与数理统计》模拟试卷 7 参考答案

一、判断题.

1. 对立事件一定是互斥事件. (√)
2. 概率为 1 的事件, 不一定是必然事件. (√)
3. 对于任意的 X, Y 都有 $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$. (×)
4. 样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的有偏估计. (×)
5. 检验假设的方法是依据小概率事件原理. (√)

二、选择题.

1. 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则有 (B).
A. $P(B|A) = 0$ B. $P(A|B) = P(A)$
C. $P(A|B) = 0$ D. $P(AB) = P(A)$
2. 设 X 的分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$, 下列选项中正确的是 (A).
A. $0 \leq F(x) \leq 1$ B. $0 \leq f(x) \leq 1$
C. $P\{X = x\} = F(x)$ D. $P\{X = x\} = f(x)$
3. 设 $g(x) = \lambda e^{-3x}, x \geq 0$ 是概率密度, 则常数 $\lambda =$ (C).
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 若 $X \sim N(1, 4), Y \sim N(1, 9)$ 且 $\rho_{XY} = 0.45$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ (D).
A. 2.4 B. 2.5 C. 2.6 D. 2.7
5. 在假设检验中, 犯第二类错误 β 是 (C).
A. $P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真})$ B. $P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为真})$
C. $P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为假})$ D. $P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为假})$

三、填空题.

1. 现从含有 2 个次品的 10 个零件中, 任取两次, 每次随机取一个, 取后不放回, 则事件

A = “两个都是次品” 的概率 $P(A) = \frac{28}{45}$ (或 0.6222).

2. 设 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Ax^2 & (0 \leq x \leq 2), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$ 则 $A = \frac{3}{8}$ 或 (0.375) .

3. 设 X 为随机变量, 若 $E(X) = 2$, $\text{Var}\left(\frac{X}{2}\right) = 1$, 则 $E[(X-2)^2] = 4$.

4. 设随机变量 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $\text{Var}(X) = \sigma^2$, 根据切比雪夫不等式估计

$$P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \frac{1}{9} \text{ 或 } (0.111).$$

5. 估计量的优良性包括无偏性、有效性和相合性 (或一致性).

四、证明题.

1. 设事件 A, B , 证明: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$\begin{aligned} \text{证: } P(A \cup B) &= P(A + \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) \\ &= P(A) + [P(\bar{A}B) + P(AB)] - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

2. 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布, 其分布密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (x \geq 0,) \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \text{ 其中未知参数 } \lambda > 0.$$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本, 其观测值为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
且 $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$

证明: λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

证: 似然函数:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i)}$$

$$\text{似然函数取对数, } \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

对数似然函数求导并令导数为零, 可得:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n \ln \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right] = \frac{n}{\lambda} - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = 0,$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)} = \frac{1}{\bar{x}}$$

五、计算题.

1. 王教授要参加学术会议，他乘汽车、火车的概率分别是 0.4 和 0.6，而汽车和火车晚点到达的概率分别是 0.9 和 0.8，则：（1）李教授正点到达的概率有多大？（2）若已知李教授晚点到达，则他是乘火车的概率为多大？

解 设 A_1, A_2 分别表示“王教授乘汽车、火车”， B 表示“正点到达”，

依题意可知：那么 A_1, A_2 构成一个完备事件组.

$$P(A_1) = 0.4 \quad P(A_2) = 0.6$$

$$P(B | A_1) = 0.9 \quad P(B | A_2) = 0.98$$

$$P(\bar{B} | A_1) = 0.1 \quad P(\bar{B} | A_2) = 0.02$$

由全概率公式可得： $P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)$

$$= 0.4 \times 0.9 + 0.6 \times 0.98$$

$$= 0.84$$

由贝叶斯公式知，王教授乘火车的概率：

$$P(A_2 | \bar{B}) = \frac{P(A_2)P(\bar{B} | A_2)}{P(\bar{B})} = \frac{0.6 \times 0.02}{0.16} = 0.075,$$

2. 设某次考试的学生成绩服从正态分布，且标准差为 16，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，样本方差 $s^2 = 225$ ，问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，是否可以认为这次考试考生的成绩的方差是 256？

$$(\chi^2_{0.01}(35) = 57.342 \quad ; \quad \chi^2_{0.025}(35) = 53.203 \quad ;$$

$$\chi^2_{0.975}(35) = 20.569 \quad ; \quad \chi^2_{0.99}(35) = 18.509)$$

解：（1）待检假设为： $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 (\sigma_0^2 = 256) \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 (\sigma_0^2 \neq 256)$

$$(2) \quad \text{已知： } n = 36, \quad s^2 = 225, \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{35 \times 225}{256} = 30.762$$

$$(3) \quad \alpha = 0.05, \quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(35) = 53.203; \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(35) = 20.569$$

$$\text{故拒绝域为: } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq 53.203 \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq 20.569$$

$$(4) \quad \text{由于 } 20.569 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 30.762 < 53.203 \text{ 成立,}$$

所以, 接受 H_0 , 即认为这次考试考生的成绩的方差仍是 256.

3. 根据经验, 已知某种清漆的干燥时间总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现随机抽取 9 个样品测其干燥时间的样本均值为 $\bar{x} = 6$, 样本方差 $s^2 = (0.7)^2$, 求 μ 的置信度为 95% 的置信区间?

$$(t_{0.01}(8) = 2.896, \quad t_{0.025}(8) = 2.306; \quad t_{0.05}(8) = 1.86)$$

解: 已知: $n = 9$, $\bar{x} = 6$, $s^2 = 0.49$, $s = 0.7$

$$\alpha = 0.95, \quad t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$$

$$\text{所以, 置信下限: } \underline{\theta} = \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 6 - 2.306 \times \frac{0.7}{\sqrt{9}} = 5.462$$

$$\text{置信上限: } \bar{\theta} = \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 6 + 2.306 \times \frac{0.7}{\sqrt{9}} = 6.538$$

即所求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $[5.4293, 6.5707]$

4. 某地区 1996 年—2000 年居民消费支出和收入金额资料如下:

收入 X (亿元)	64	70	77	82	92
消费支出 Y (亿元)	56	60	66	75	88

建立该地区消费支出 Y 对收入 X 的直线回归方程?

解：回归方程： $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	64	56	4096	3136	3584
	70	60	4900	3600	4200
	77	66	5929	4356	5082
	82	75	6724	5625	6150
	92	88	8464	7744	8096
Σ	385	345	30113	24461	27112
$\frac{1}{n}\Sigma$	77	69			

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 385 \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 345 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 30113 \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 24461 \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 27112$$

回归方程： $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{5 \times 27112 - 385 \times 345}{5 \times 30113 - (385)^2} = 1.1688$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 69 - 1.1688 \times 77 = -20.9976$$

回归方程为： $y = -20.9976 + 1.1688x$