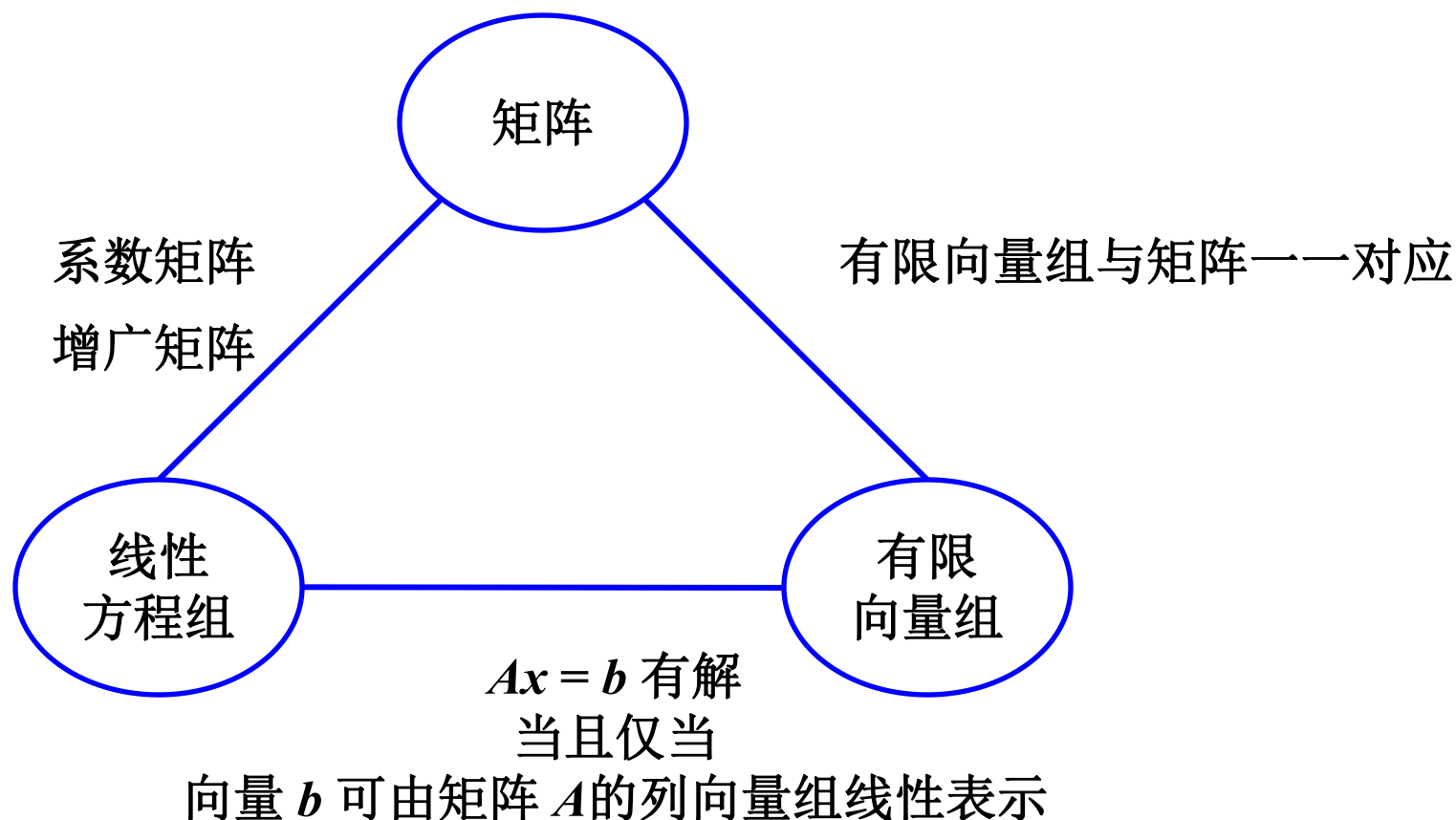


§ 3 向量组的秩



课本P. 88定理4:

- 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ **线性相关** 的充要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩 **小于** 向量的个数 m ;
- 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ **线性无关** 的充要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩 **等于** 向量的个数 m .

n 元线性方程组 $Ax = b$ 其中 A 是 $m \times n$ 矩阵	矩阵 (A, b)	向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 及 向量 b
是否存在解?	$R(A) = R(A, b)$ 成立?	向量 b 能否由向量组 A 线性表示?
无解	$R(A) < R(A, b)$	NO
有解	$R(A) = R(A, b)$	YES x 的分量是线性组合的系数
唯一解	$R(A) = R(A, b)$ $=$ 未知数个数	表达式唯一
无穷解	$R(A) = R(A, b)$ $<$ 未知数个数	表达式不唯一

回顾：矩阵的秩

定义： 在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列 ($k \leq m, k \leq n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 **k 阶子式**。

规定： 零矩阵的秩等于零。

定义： 设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D ，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为**矩阵 A 的秩**，记作 $R(A)$ 。

结论： 矩阵的秩

= 矩阵中最高阶非零子式的阶数

= 矩阵对应的行阶梯形矩阵的非零行的行数

向量组的秩

想一想：依次请回答下面的问题

$\alpha_1 = (2, 4, 2)^T$ 线性相关还是无关？

答案：无关

$\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T$
线性相关还是无关？

答案：无关

$\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (2, 3, 1)^T$
线性相关还是无关？

答案：相关

$\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_4 = (3, 5, 2)^T$

线性相关还是无关？

答案：相关

$\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (2, 3, 1)^T, \alpha_4 = (3, 5, 2)^T$

线性相关还是无关？

答案：相关

向量组的秩

以上问题我们发现了怎么样的一种零界状态？

向量组的秩

定义：设有向量组 A ，如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_r$ ，满足

- ① 向量组 $A_0: a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关；
- ② 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**最大线性无关向量组**，简称**最大无关组**。

最大无关组所含向量个数 r 称为**向量组 A 的秩**，记作 R_A 。

例1: 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 的秩, 并求 A 的一个

最高阶非零子式.

解：第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故 $R(A) = 3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式. 选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0 = (a_1, a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

$$A_0 = (a_1, a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim^r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

$R(A_0) = 3$, 计算 A_0 的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

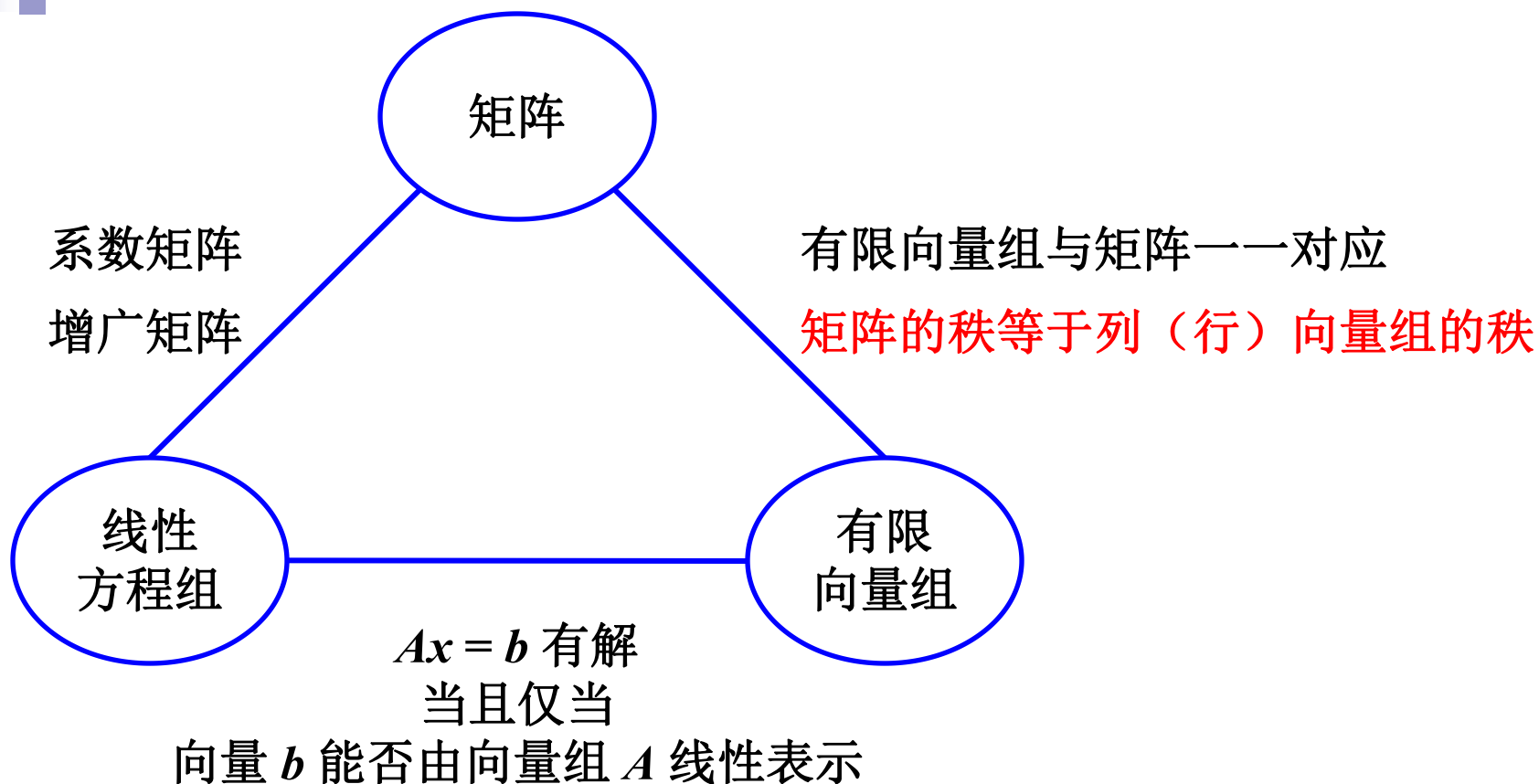
因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

结论: 矩阵的最高阶非零子式一般不是唯一的, 但矩阵的秩是唯一的.

$$A_0 = (a_1, a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

事实上,

- 根据 $R(A_0) = 3$ 可知: A_0 的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个线性无关的部分组.
- 在矩阵 A 中任取 4 个列向量, 根据 $R(A) = 3$ 可知: A 中所有 4 阶子式都等于零, 从而这 4 个列向量所对应的矩阵的秩小于 4, 即这 4 个列向量线性相关.
- A_0 的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个最大线性无关组.
- 矩阵 A 的列向量组的秩等于 3.
- 同理可证, 矩阵 A 的行向量组的秩也等于 3.



一般地，

- 矩阵的秩等于它的列向量组的秩。
矩阵的秩等于它的行向量组的秩。 (P.90 定理6)

一般地，

- 矩阵的秩等于它的列向量组的秩.

矩阵的秩等于它的行向量组的秩. (P.90 定理6)

- 今后，向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 的秩也记作 $R(a_1, a_2, \dots, a_m)$.
- 若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式，则 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组， D_r 所在的 r 行是 A 的行向量组的一个最大无关组.
- 向量组的最大无关组一般是不唯一的.

例2: 已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$,

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组 a_1, a_2 的线性相关性.

解:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2) = 2$, 故向量组 a_1, a_2 线性无关,

同时, $R(a_1, a_2, a_3) = 2$, 故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关,

从而 a_1, a_2 是向量组 a_1, a_2, a_3 的一个最大无关组.

事实上, a_1, a_3 和 a_2, a_3 也是最大无关组.

最大无关组的等价定义

结论： 向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的.

定义： 设有向量组 A ，如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_r$ ，满足

- ① 向量组 $A_0: a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关;
 - ② 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关;
 - ② 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示;
- 那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**最大无关组**.

例2: 已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$,

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组 a_1, a_2 的线性相关性.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2) = 2$, 故向量组 a_1, a_2 线性无关,

同时, $R(a_1, a_2, a_3) = 2$, 故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关,

从而 a_1, a_2 是向量组 a_1, a_2, a_3 的一个最大无关组.

事实上, a_1, a_3 和 a_2, a_3 也是最大无关组.

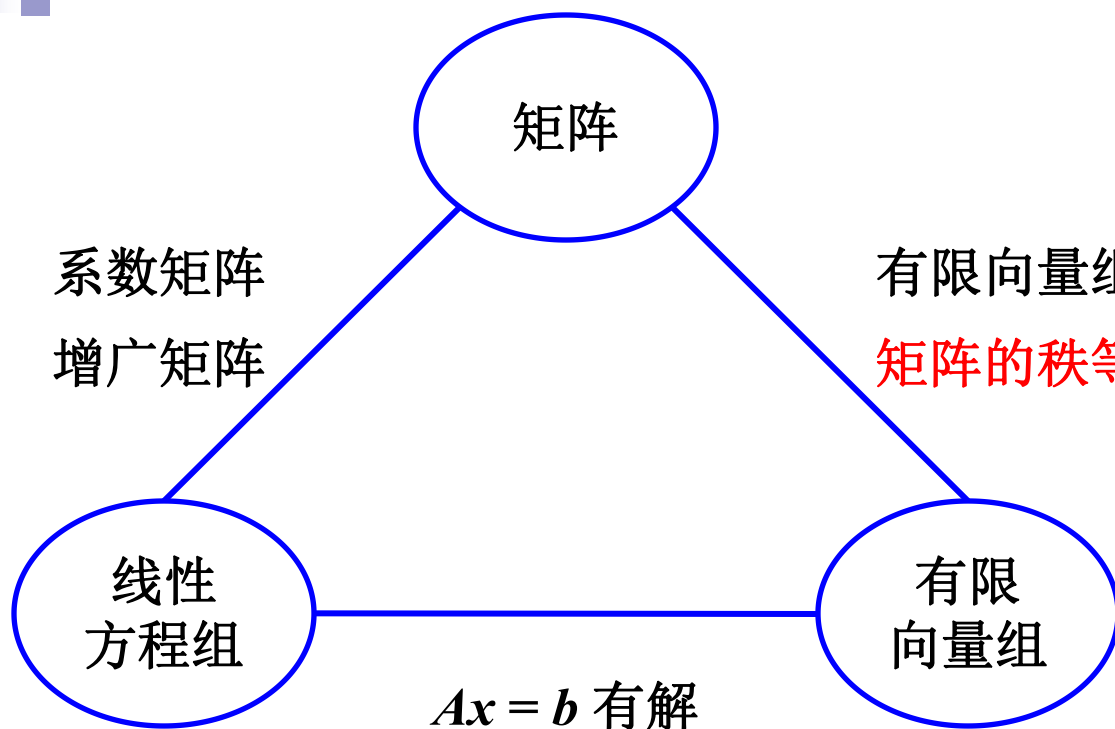
向量组的秩

主要研究三个问题？ 我是谁？ 我从哪里来？ 要到哪里去？

向量组的最大线性无关组.

矩阵的最高阶非零子式.

矩阵的秩与向量组的秩的关系.



有限向量组与矩阵一一对应
矩阵的秩等于列（行）向量组的秩

$Ax = b$ 有解
当且仅当
向量 b 能否由向量组 A 线性表示

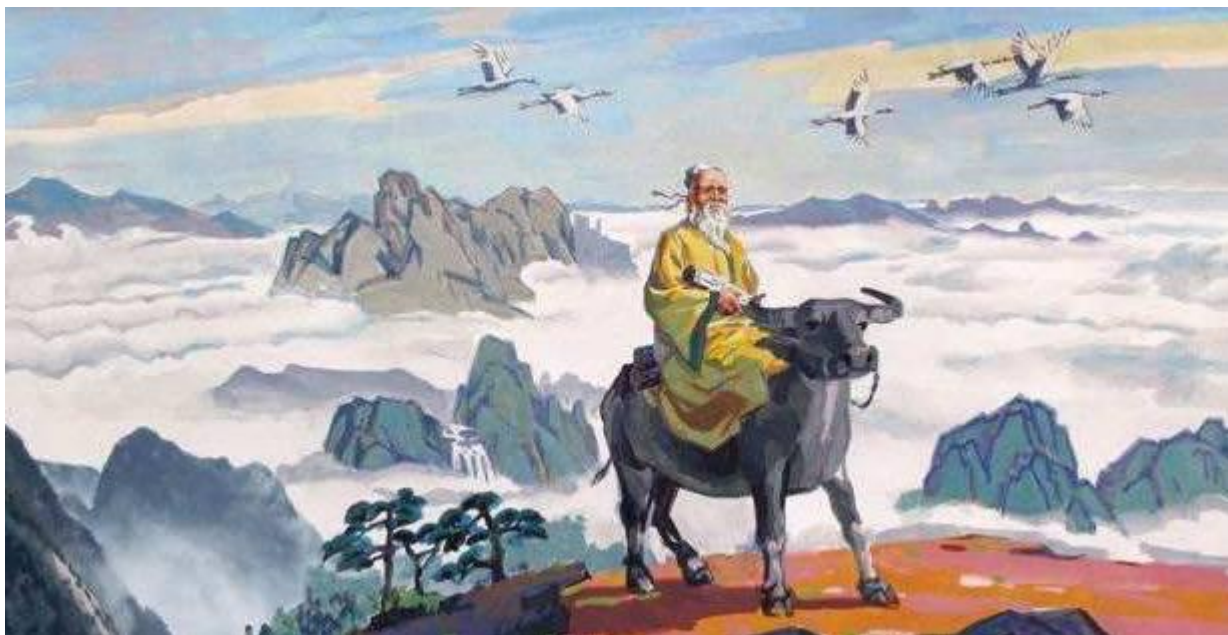
一般地，

- 矩阵的秩等于它的列向量组的秩。
矩阵的秩等于它的行向量组的秩。

向量组的秩

学习向量组的最大线性无关组和秩有什么作用？可以解决本课程的什么问题？

老子的《道德经》有同学了解吗？



道家精髓

道生一、
一生二、
二生三、
三生万物

例2: 已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$,

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组 a_1, a_2 的线性相关性.

解:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2) = 2$, 故向量组 a_1, a_2 线性无关,

同时, $R(a_1, a_2, a_3) = 2$, 故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关,

从而 a_1, a_2 是向量组 a_1, a_2, a_3 的一个最大无关组.

事实上, a_1, a_3 和 a_2, a_3 也是最大无关组.

继续追问:

由于 a_1, a_2 ; a_1, a_3 ; a_2, a_3 是向量组 a_1, a_2, a_3 的一个最大无关组.

能不能用最大线性无关组表示向量组中其余向量?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = 2a_1 + a_2$$

最大无关组的等价定义

结论： 向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的.

定义： 设有向量组 A ，如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_r$ ，满足

- ① 向量组 $A_0: a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关;
 - ② 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关;
 - ② 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示;
- 那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**最大无关组**.

最大无关组的意义

结论： 向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的.

- 用 A_0 来代表 A , 掌握了最大无关组, 就掌握了向量组的全体.

特别, 当向量组 A 为无限向量组, 就能用有限向量组来代表.

- 凡是对有限向量组成立的结论, 用最大无关组作过渡, 立即可推广到无限向量组的情形中去.

矩阵

系数矩阵
增广矩阵

有限向量组与矩阵一一对应
矩阵的秩等于列（行）向量组的秩

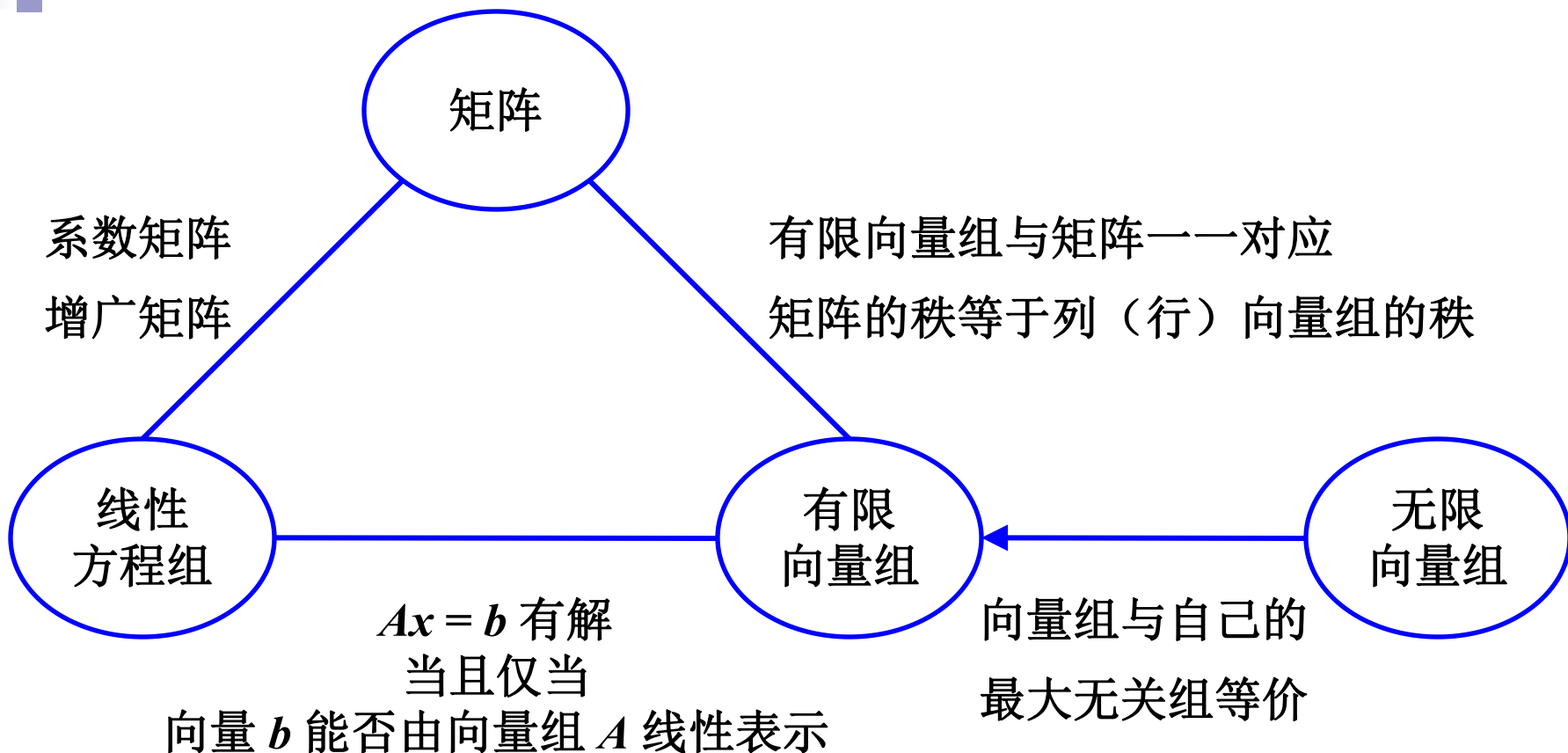
线性
方程组

有限
向量组

无限
向量组

$Ax = b$ 有解
当且仅当
向量 b 能否由向量组 A 线性表示

向量组与自己的
最大无关组等价



例3: 全体 n 维向量构成的向量组记作 R^n , 求 R^n 的一个最大无关组及 R^n 的秩.

解: n 阶单位矩阵 $E = (e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ 的列向

量组是 R^n 的一个最大无关组, R^n 的秩等于 n .

思考: 上三角形矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^n 的

一个最大无关组吗?

例4: 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad \quad - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

试求全体解向量构成的向量组 S 的秩.

解:通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \{x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\} \quad \xi_1, \xi_2 \text{ 线性无关}$$

$$R_s = 2$$

例5：求向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

的一个最大无关组，并把其余向量用该最大无关组线性表示。

解:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 15 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -10 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

结论:

1.秩为? 3

2.最大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$

3.将其余的向量用最大无关组表示:

$$\alpha_3 = -5\alpha_1 - 10\alpha_2 \quad \alpha_4 = 3\alpha_1 + 5\alpha_2$$

例6: 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 的秩, 并求 A 的一个

最高阶非零子式.

例6: 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组, 并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

解：第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故 $R(A) = 3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式. 选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0 = (a_1, a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

$$A_0 = (a_1, a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

$R(A_0) = 3$, 计算 A_0 的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

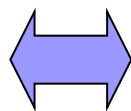
A_0 的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组.

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

思考：如何把 a_3, a_5 表示成 a_1, a_2, a_4 的线性组合？

思路1：利用P.83 定理1 的结论

向量 b 能由
向量组 A
线性表示



线性方程组
 $Ax = b$
有解

令 $A_0 = (a_1, a_2, a_4)$
求解 $A_0x = a_3$
 $A_0x = a_5$

思路2：利用矩阵 A 的行最简形矩阵.

解（续）：为把 a_3, a_5 表示成 a_1, a_2, a_4 的线性组合，把矩阵 A 再变成行最简形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

于是 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ ，即

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5 = 0$$

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + x_4 b_4 + x_5 b_5 = 0$$

同解.

即矩阵 A 的列向量组与矩阵 B 的列向量组有相同的线性关系.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

可以看出：

$$b_3 = -b_1 - b_2$$

$$b_5 = 4b_1 + 3b_2 - 3b_4$$

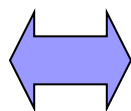
所以

$$a_3 = -a_1 - a_2$$

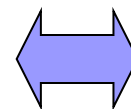
$$a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4$$

课堂小结

向量组的最大
线性无关组

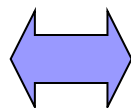


向量组的秩



矩阵的秩（列
秩，行秩）

矩阵的最高阶非零子式



向量组的最大线性无关组

向量组的最大线性无关组的意义和价值