

第7章 参数估计

(A)

一、填空题

1. 总体参数的常用点估计方法是_____和_____；
2. 若一个样本观测值是 0, 1, 0, 1, 0, 1, 则总体均值的矩估计值是____, 总体方差的矩估计值是_____.
3. 若 0, 2, 2, 3, 2, 3 是均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 的观测值, 则 θ 的矩估计值是_____.
4. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}$, 而 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自 X 的简单随机样本, 则未知参数 θ 的矩估计量为_____.
5. 若 X 是离散型随机变量, 其分布律是 $P\{X = x\} = p(x; \theta)$, (θ 是待估计参数), 则似然函数是_____, X 是连续型随机变量, 其概率密度是 $f(x; \theta)$, 则似然函数是_____.
6. 若未知参数 θ 的估计量是 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 有_____成立, 则 $\hat{\theta}$ 称为 θ 的一致估计量, 若_____, 称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量. 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是未知参数 θ 的两个无偏估计量, 若_____, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.
7. 对任意分布的总体, 样本均值 $\bar{X}$ 是_____的无偏估计量.
8. 设总体 $X \sim P(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$ 是未知参数, $X_1, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本, 则 λ 的矩估计量为_____, 极大似然估计为_____.
9. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本, 则当 σ^2 已知时, 求 μ 的置信区间所使用的枢轴量 $Z =$ _____; Z 服从_____分布; 当 σ^2 未知时, 求 μ 的置信区间所使用的枢轴量 $T =$ _____, T 服从_____分布.
10. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本, μ 未知时, 求 σ^2 的置信区间所使用的枢轴量为 $\chi^2 =$ _____; χ^2 服从_____分布.
11. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 是总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的一个样本, $\bar{X}, S_1^2$ 分别是样本均值和样本方差; $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一个样本, $\bar{Y}, S_2^2$ 是样本均值和样本方差, 这两个样

本相互独立, 则 $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$ 服从_____.

12. 设由来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 容量为 9 的简单随机样本, 得样本均值 $\bar{x} = 5$, 标准差 $s = 3$ 则未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是_____.

13. 已知一批零件的长度 X (单位:cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信水平为 0.9 的置信区间为_____.

二、单项选择

1. 若 θ 是 X 的未知参数, $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量, 则 ().

(A) $\hat{\theta}$ 是一个数, 且近似等于 θ

(B) $\hat{\theta}$ 是一个随机变量

(C) $\hat{\theta}$ 是一个统计量且 $E(\hat{\theta}) = \theta$

(D) 当 n 很大时, $\hat{\theta}$ 的值可以任意接近 θ

2. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 和 σ^2 均未知, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 ().

(A) μ 的无偏估计

(B) σ^2 的无偏估计

(C) μ 的矩估计

(D) σ^2 的矩估计

3. 设 4, 3, 4, 3, 5, 4, 4, 5 是来自总体 $N(\mu, 2)$ 的一个样本观测值, 则 μ 的最大似然估计是 ().

(A) 4

(B) 3

(C) 4.5

(D) 5

4. 矩估计必然是 ().

(A) 无偏估计

(B) 总体矩的函数

(C) 样本矩的函数

(D) 最大似然函数

5. 对总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的均值作区间估计, 得到置信水平为 95% 的置信区间, 意义指这个区间 ().

(A) 平均含总体 95% 的值

(B) 平均含样本 95% 的值

(C) 有 95% 的机会含 μ 的值

(D) μ 有 95% 的机会落入置信区间

6. $X_1, \dots, X_n$ 是总体 X 的一个样本, 且 $E(X)$ 已知, $D(X)$ 未知, 则 () 是 $D(X)$ 的无偏估计量.

(A) $\frac{1}{2} (X_1 - \mu)^2 - \frac{1}{2} (X_2 - \mu)^2$

(B) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X})^2$

(C) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

(D) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

7. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, 若样本容量 n 和置信水平 $1 - \alpha$ 均不变, 则对于不同的样本观测值, 总体 μ 的置信区间长度 ().

- (A) 不变 (B) 变短 (C) 变长 (D) 不能确定

8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, 对给定的样本观测值, 总体均值 μ 的置信区间长度 l , 与置信水平 $1 - \alpha$ 的关系是 ().

- (A) 当 $1 - \alpha$ 变小时, l 变大 (B) 当 $1 - \alpha$ 变小时, l 变小
(C) 当 $1 - \alpha$ 变小时, l 不变 (D) $1 - \alpha$ 与 l 的关系不能确定

9. 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现从中随机抽取 16 个零件, 测样本均值为 $\bar{x} = 20(cm)$, 样本标准差 $s = 1(cm)$, 则 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间是 ().

- (A) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$ (B) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$
(C) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$ (D) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$

三、解答题

1. 设总体 X 服从几何分布, 分布律为 $P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1}p, k = 1, 2, \dots, (0 < p < 1)$ 求 p 的矩估计量.

2. 求均匀分布 $X \sim U(a, b)$ 中参数 a, b 的矩估计量.

3. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x - \theta|}, \quad -\infty < x < \infty$$

$X_1, \dots, X_n$ 是来自 X 的简单随机样本, 求参数 θ 的矩估计量.

4. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta}, & x \geq \mu, \text{ 其中 } \theta (\theta > 0), \mu \text{ 是未知参数,} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$X_1, \dots, X_n$ 是来自 X 的简单随机样本, 求 θ 和 μ 的矩估计量.

5. 设 $X \sim B(m, p)$, m 已知, $0 < p < 1$ 未知, $X_1, \dots, X_n$ 是来自 X 的简单随机样本, 求 p 的最大似然估计量.

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 今从 X 中抽取 10 个个体, 得数据如下:

据如下:

1050	1100	1080	1200	1300
1250	1340	1060	1150	1150

试用最大似然估计法估计 θ .

7. 设某电子元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$$

$\theta > 0$ 为未知参数, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值, 求 θ 的最大似然估计值.

8. 设 X_1, X_2 是取自总体 $N(\mu, 1)$ 的一个样本, 试证下面三个估计量均为 μ 的无偏估计量, 并确定最有效的一个.

$$\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2, \quad \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2, \quad \frac{1}{2}(X_1 + X_2).$$

9. 设总体 X 的数学期望为 μ , $X_1, \dots, X_n$ 是来自 X 的简单随机样本. $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是任意常数, 证明 $\sum_{i=1}^n a_i X_i / \sum_{i=1}^n a_i$ ($\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$) 是 μ 的无偏估计量.

10. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \dots, X_n$ 是来自 X 的一个样本.

(1) 试确定常数 c , 使 $c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计;

(2) 试确定常数 c , 使 $(\bar{X}^2 - cS^2)$ 为 μ^2 的无偏估计.

11. 设某种清漆的 9 个样品, 其干燥时间 (以小时计) 分别为

6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0

设干燥时间总体服从 $N(\mu, \sigma^2)$; 在下面两种情况下, 求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

(1) 由以往的经验知 $\sigma = 0.6$ (小时);

(2) σ 未知.

12. 某机器生产圆筒状的金属品, 抽出 9 个样品, 测得其直径分别为 1.01, 0.97, 1.03, 1.04, 0.99, 0.98, 0.99, 1.01, 1.03 公分, 求此机器所生产的产品, 平均直径的置信水平为 99% 的置信区间. 假设产品直径近似服从正态分布.

13. 某灯泡厂从当天生产的灯泡中随机抽取 9 只进行寿命测试, 取得数据如下 (单位: 小时): 1050, 1100, 1080, 1120, 1250, 1040, 1130, 1300, 1200. 设灯泡寿命服从正态分布, 试求当天生产的全部灯泡的平均寿命的置信水平为 95% 的置信区间.

14. 假设某种香烟的尼古丁含量服从正态分布, 现随机抽取此种香烟 8 支为一样本, 测得其尼古丁平均含量为 18.6 毫克, 样本标准差 $s = 2.4$ 毫克, 试求此种香烟尼古丁含量方差的置信水平为 0.99 的置信区间.

15. 从某汽车电池制造厂生产的电池中随机抽取 5 个, 测得其寿命分别为 1.9, 2.4, 3.0, 3.5, 4.2, 求电池寿命方差的置信水平为 95% 的置信区间, 假设电池寿命近似服从正态分布.

16. 设使用两种治疗严重膀胱疾病的药物, 其治疗所需时间 (以天计) 均服从正态分布. 试验数据如下:

使用第一种药物 $n_1 = 14, \bar{x}_1 = 17, s_1^2 = 1.5$

使用第二种药物 $n_2 = 16, \bar{x}_2 = 19, s_2^2 = 1.8$

假设两正态总体的方差相等，求使用两种药物平均治疗时间之差的置信水平为 99% 的置信区间。

17. 测得两个民族中各 8 位成年人的身高（单位:cm）如下

A 民族：162.6 170.2 172.7 165.1 157.5 158.4 160.2 162.2

B 民族：175.3 177.8 167.6 180.3 182.9 180.5 178.4 180.4

假设两正态总体的方差相等，求两个民族平均身高之差的置信水平为 90% 的置信区间。

18. 工人和机器人独立操作在钢部件上钻孔，钻孔深度分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ， $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知，今测得部分钻孔深度（单位:cm）如下

工人操作：4.02 3.94 4.03 4.02 3.95 4.06 4.00

机器人操作：4.01 4.03 4.02 4.01 4.00 3.99 4.02 4.00

试求 σ_1^2 / σ_2^2 的置信水平为 0.90 的置信区间。

19. 求 12 题中 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信区间下限。

20. 求 14 题中香烟尼古丁含量方差的置信水平为 0.99 的单侧置信区间置信上限。

21. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，已知 $\sigma = \sigma_0$ ，要使总体均值 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间长度不大于 L ，问应抽取多大容量的样本？

四、应用题

1. 从某大学总数为 500 名学生的数学课程的考试成绩中，随机地抽取 60 名学生的考试成绩如下：

81	68	71	85	57	85	92	74	61	80	68	77	75	57	46	80	69	63	67	92
88	75	89	75	59	72	85	77	100	73	58	69	68	68	59	89	70	72	89	94
78	45	92	93	69	70	99	79	80	69	82	67	74	73	72	70	83	70	76	60

根据这组数据，我们能对这次数学课程的考试成绩的总体情况得到什么信息？

2. （产品的质量标准与质量控制）一般产品质量都有国家标准，企业生产的产品必须符合国家标准才准销售，但某些新产品没有国家标准，企业必须制定企业标准，并予以发布。对企业来说，标准高了生产成本高，但可以有较强的市场竞争力；标准低了生产成本低，但影响产品的市场竞争力。

如某材料厂生产的某种新型材料的抗压力服从正态分布（没有国家标准），现测试 20 个样品，测得其抗压力（单位： 10^3N/cm^2 ）分别为：

45.7	44.7	46.2	47.3	47.2	47.7	43.8	45.8	47.1	44.9
45.3	44.3	44.2	45	45.2	43.9	45.4	45.6	46.1	45.6

此时，该厂应如何设定该材料的企业标准（抗压力的均值）？另一方面，从工厂的管理来看，希望产品质量比较稳定，即希望该材料的抗压力变化不应该太大，应该如何进行质量控制？

(B)

1. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中参数 θ ($0 < \theta < 1$) 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

2. 设总体 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ ($0 < \theta < \frac{1}{2}$) 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的

矩估计值和最大似然估计值.

3. 设总体 X 的分布函数 $F(x; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$, 其中未知参数 $\beta > 1$,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自 X 的简单随机样本, 求(1) β 的矩估计量; (2) β 的最大似然估计量.

4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$). $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 $D(T)$.

6. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n > 2$) 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其样本均值为 $\bar{X}$,

记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

- (1) 求 Y_i 的方差 $D(Y_i), i = 1, 2, \dots, n$;
- (2) 求 Y_i 与 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_i, Y_n)$;
- (3) 若 $c(Y_1 + Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量, 求常数 c .

7. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$, 其中 $\theta > 0$ 是未知参数, 从 X 中抽取

简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 记 $\hat{\theta} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

- (1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;
- (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;
- (3) 如果 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有无偏性.