

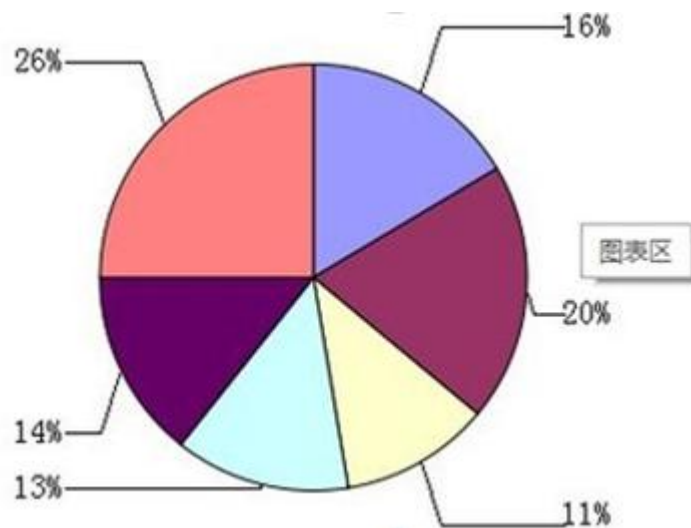


向量组之间的线性表示



315调查显示：

房屋质量不过关让消费者最不能忍受，所占比例26%



» 向量组之间的线性表示

3

作为房屋质量问题，最突出的就是混凝土的质量



» 向量组之间的线性表示

4

【问题的给出】 一个混凝土生产企业可以生产出三种型号不同的混凝土，他们具体的配方比例如下表所示：

	型号1混凝土	型号2混凝土	型号3混凝土
水	10	10	10
水泥	22	26	18
沙子	32	31	29
石头	53	64	50
煤炭灰	0	5	8

问：现在有用户要求混凝土中含水，水泥，沙子，石头，煤炭灰的比例分别为：24，52，73，133，12，那么，能否用这三种混凝土配出满足其要求的混凝土那？

» 向量组之间的线性表示

5

【关系建立】根据上述表格和向量的表示方法，我们首先将三种型号的混凝土分别表示为

	型号1混 泥土	型号2混 泥土	型号3混 泥土
水	10	10	10
水泥	22	26	18
沙子	32	31	29
石头	53	64	50
煤炭灰	0	5	8

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 32 \\ 53 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 31 \\ 64 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 29 \\ 50 \\ 8 \end{pmatrix}$$

» 向量组之间的线性表示

6

【关系建立】

客户要求的混凝土是否能被这三种型号的混凝土表示的问题就转换成

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 52 \\ 73 \\ 133 \\ 12 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 32 \\ 53 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 31 \\ 64 \\ 5 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 29 \\ 50 \\ 8 \end{pmatrix}$$

简记为

$$\mathbf{b}_1 = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + k_3 \boldsymbol{\alpha}_3$$

问：现在有用户要求混凝土中含水，水泥，沙子，石头，煤炭灰的比例分别为 $24, 52, 73, 133, 12$ ，那么，能否用这三种混凝土配出满足其要求的混凝土那？

向量组之间的线性表示

7

【概念引出】 向量的线性表示

定义1 给定向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量 b , 如果存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得

$$b = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$$

则向量 b 是向量组A的线性组合, 这时称 b 能由向量组A线性表示.

刚才的表达式 $b_1 = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$ 如果能够成立

则说明 b_1 能够由向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 线性表示

向量 b 能由向量组 A 线性表示，等价于方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_m \alpha_m = b$$

有解.

由线性方程组有解的充分必要条件，可得如下结论

向量组之间的线性表示

【向量组线性表示的充分必要条件是】

定理1 向量 b 能由向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示的

充分必要条件是矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的秩等于矩阵

$B = (A, b) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, b)$ 的秩.

总结

问题：

向量的线性表示

$$b = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m$$

方程组有解

解决途径：

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 的秩

$B = (A, b) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, b)$ 的秩

» 向量组之间的线性表示

11

设原问题对应的增广矩阵为B

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1) = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 24 \\ 22 & 26 & 18 & 52 \\ 32 & 31 & 29 & 73 \\ 53 & 64 & 50 & 133 \\ 0 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

MAILAB desktop keyboard shortcuts, such as Ctrl+S, are now customizable.
In addition, many keyboard shortcuts have changed for improved consistency across the desktop.

To customize keyboard shortcuts, use [Preferences](#). From there, you can also restore previous default settings by following the steps outlined in [Help](#).

Click **OK** if you do not want to see this message again.

U =

1.0000	0	0	0.6000
0	1.0000	0	0.8000
0	0	1.0000	1.0000
0	0	0	0
0	0	0	0

fx >> |

I

初等行变换

则 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

由此我们得到结果，刚才用户的需求能满足，所用型号1-3
三种混凝土的比例为：0.6：0.8：1

【问题的提升】还有一个混凝土生产企业，也可以生产出三种不同型号的混凝土，他们具体的配方表如下表所示：

	型号1混泥土	型号2混泥土	型号3混泥土
水	12	8	9.5
水泥	26.4	20.8	17.1
沙子	38.4	24.8	27.55
石头	63.6	51.2	47.5
煤炭灰	0	4	7.6

分析，第二家生产的这三种混凝土是否可以代替第一家企业的那三种？

向量组之间的线性表示

13

【问题分析】 设第二家生产的三种型号的混凝土分别表示为

	型号1混凝土	型号2混凝土	型号3混凝土
	土	土	土
水	12	8	9.5
水泥	26.4	20.8	17.1
沙子	38.4	24.8	27.55
石头	63.6	51.2	47.5
煤炭灰	0	4	7.6

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 32 \\ 53 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 31 \\ 64 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 29 \\ 50 \\ 8 \end{pmatrix}$$

则该问题转换为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能否被向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性表出的问题.

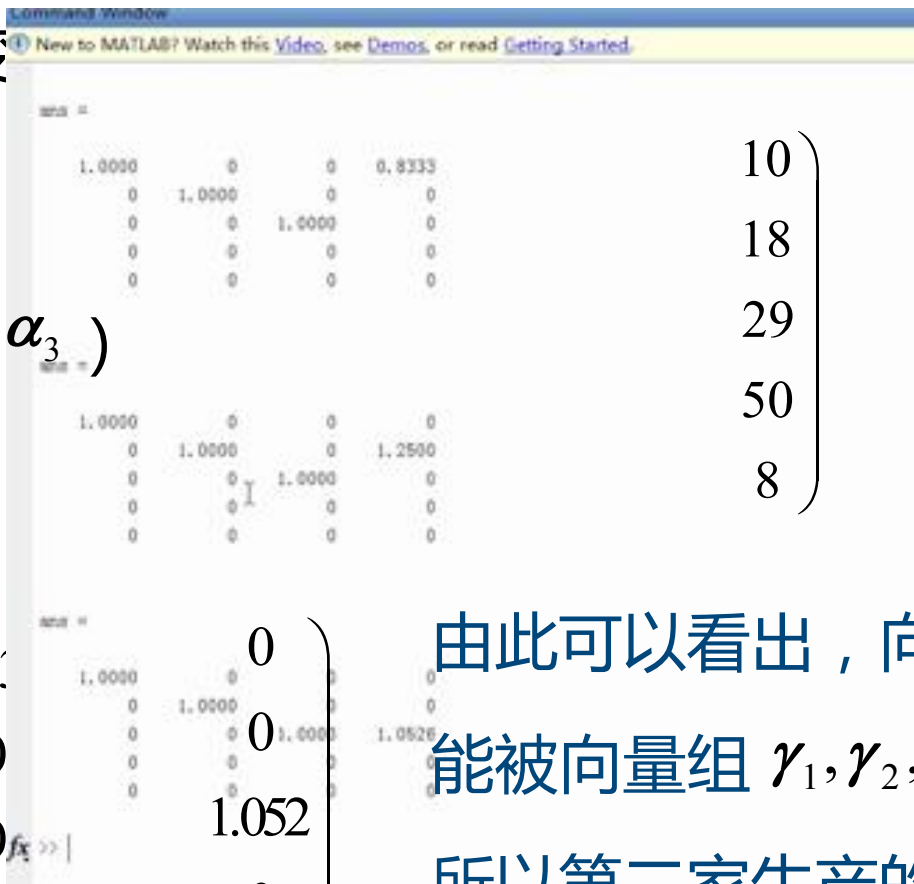
向量组之间的线性表示

14

分别对矩阵 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1), (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_2), (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_3)$

进行初等行变

$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$



10
18
29
50
8

初等行
变换
→

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可以看出，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能被向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性表示.

所以第二家生产的混凝土可以代替第一家的.

【概念提升】向量组的线性表示

定义2 设有两个向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及B: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$

若B组中每个向量都能由向量组A线性表示，则称向量组B能由向量组A线性表示.

刚才的 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 能将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出的问题，就是

$$r(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = r(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

如果继续提问，第一家企业可以代替第二家企业吗？

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

» 向量组之间的线性表示

【向量组的线性表示的充分必要条件】

定理2 向量组B: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ 能由 向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

线性表示的充分必要条件是矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的秩

等于矩阵 $(A, B) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_l)$ 的秩

推论： 向量组A与向量组B等价的充分必要条件是

$$r(A) = r(B) = r(A, B)$$

课堂小结

1. 单个向量能被线性表出的概念
2. 一个向量组能被另一个向量组线性表出的概念
3. 两个向量组之间互相线性表出的概念
4. 原理依据线性方程组的解与系数矩阵秩的关系
5. 算法使用了Matlab软件

谢谢大家聆听！

