

用机枪能打下飞机？

在抗美援朝中有用高射机枪打下美军飞机的事情发生，而且还不止一次。一般来讲机枪打不中敌机的主要原因；一是敌机飞行速度太快，不容易捕捉住目标；二是敌机飞得太高，子弹射程不够。但打中敌机的机会也不是一点没有，例如敌机在俯冲扫射时飞行方向相对稳定，如果抓住时机，就能捕捉住目标。另外，敌机一直欺我没有防空能力，俯冲时飞得很低，如果抓住这一时机先敌开火，定能打中敌机或置敌于被动地位。但这样作的缺点是危险性太大。后来人们总结出一整套对付敌机的办法：一是作战准备要足，发现目标要快；二是捕捉目标要稳，抓住时机突然开火；三是集中火力，先打敌其中一架飞机。办法有了，指战员们的信心也就足了。

我们可以看到虽然每发子弹击中飞机的概率很小，但是如果射击的次数多了，这是飞机被击中的概率就高了，可究竟有多高呢？下面我们一起来用概率的观点看一看。

假设每发子弹射中飞机的概率为 p (很小)，对于一架飞机连续射击 n 次(足够大)，这 n 次是否射中是相互独立的。假定 X 是 n 次射击中击中飞机的次数，则 $X \sim b(n, p)$ ，于是

$$P\{X=0\}=(1-p)^n, \quad P\{X \geq 1\}=\sum_{k=1}^{\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

后面的求和计算量太大，注意到 p 很小， n 足够大，由泊松定理，此时

$$P\{X=k\} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}, \quad \text{于是上面两个式子可以近似为：}$$

$$P\{X=0\} \approx e^{-np}, \quad P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} \approx 1 - e^{-np}$$

假设 $p=0.001$, $n=100$, 则

$$P\{X=0\} \approx e^{-0.1} = 0.368, \quad P\{X \geq 1\} \approx 1 - e^{-0.1} = 0.632$$

可以看到在这种情况下，一枪未中的概率为 0.368, 而至少打中一枪的概率为 0.632。由此可见用机枪打下飞机不是完全不可能的事情。